Gregorio Klimovsky

Las ciencias formales y el método axiomático

a-Z editora

Las ciencias formales
y el método axiomático

Gregorio Klimovsky

Las ciencias formales y el método axiomático

a-Z editora

Paraguay 2351 (C1121ABK)
Buenos Aires, Argentina.
Teléfono 4961-4036 y líneas rotativas.
Fax: 4961-0089
Correo electrónico: correo@az-editora.com.ar

Libro de edición argentina.
Hecho el depósito de la ley 11.723.

ISBN: 950-534-607-7

Dedicado a mi esposa Tatiana
y a mi hijo Sergio Leonardo.

Índice

Advertencia preliminar

El presente texto fue redactado, en un principio, para ser incluido como capítulo en la obra *Las desventuras del conocimiento científico. Una introducción a la epistemología* (A•Z Editora, Buenos Aires, 1994). Resultó demasiado extenso, por lo que fue reemplazado por uno más breve. Hemos creído, sin embargo, que es interesante publicarlo de todas maneras. El tema tratado es el método axiomático, del cual no pretendemos examinar con detalle las peculiaridades lógicas sino limitarnos a señalar su importancia epistemológica. Creemos que el advenimiento de este método constituye una verdadera revolución en nuestra concepción de las ciencias formales, y la intención es señalar por qué.

Reconocimiento

Una vez más agradezco al profesor Guillermo Boido su colaboración, tanto para realizar el seminario que dio origen a estas páginas como para revisar y criticar el texto que se expone a continuación. Sin sus consejos y opiniones no podríamos haber llevado a cabo esta tarea.

I

Ciencias fácticas y ciencias formales: cinco preguntas

Las disciplinas *fácticas* se ocupan de entidades concretas que pueden ser ubicadas en un determinado tiempo y lugar o, al menos, en un determinado instante. Este último caso podría ser el de cierta parte de la psicología, como por ejemplo la que se ocupa de las emociones, sensaciones que parecen no ocupar lugar pero que tienen existencia en un momento dado. Entre las entidades que atañen a las ciencias fácticas podríamos citar, entonces, a cuerpos físicos y sustancias químicas, seres vivos, fenómenos y conductas psicológicas, comportamientos de una comunidad social, sistemas económicos o lingüísticos. El método estándar de estas ciencias es el llamado ***método hipotético deductivo****.

Pero no resulta claro que las ciencias *formales,* como la matemática o la lógica, se ocupen de "objetos" en el mismo sentido. Si se tiene el deseo de hablar de "objetos matemáticos", habría que acudir, de una manera u otra, a posiciones filosóficas como las de Platón o Kant. Si acudiéramos a Platón, estaríamos obligados a admitir, además de la existencia del mundo que percibimos con los sentidos, la de un mundo de objetos formales o ideales que lo trasciende. Si, en cambio, acudiéramos a Kant, deberíamos vincular la matemática con algunas cualidades de ordenamiento y construcción que nuestra mente es capaz de producir a partir de los datos fenoménicos que provienen de la experiencia. Pero en realidad, como hemos de analizar más adelante, podríamos también negar que existan "objetos matemáticos", y entonces la matemática sería algo parecido a la lógica: si bien no trata de ningún objeto en particular, sirve como un peculiar instrumento para efectuar deducciones o construcciones. Estaríamos en presencia de construcciones de estructuras matemáticas posibles, que luego podríamos encontrar ejemplificadas (o no) en la realidad.

* Sobre el método hipotético deductivo véase, por ejemplo, Klimovsky, G., *Las desventuras del conocimiento científico. Una introducción a la epistemología,* Buenos Aires, A•Z editora, 1994.

En este trabajo comenzaremos por discutir brevemente lo que se ha pensado, a lo largo de la historia de la ciencia y de la filosofía, acerca de *qué es* la matemática y *cuál es* su fundamento. Luego avanzaremos algo más allá del campo estricto de la matemática y daremos cuenta de un concepto más amplio, el de "sistema sintáctico", que es, quizá, la noción más general que emplean disciplinas o teorías formales desarrolladas con una metodología totalmente distinta de la que emplean las ciencias fácticas. Dicho sea de paso, la matemática ha sido el primer ejemplo paradigmático de ciencia con un grado de sistematización deductiva tal como para permitir, aun a los investigadores de la antigüedad, tomar esta disciplina como paradigma y ejemplo de cómo debe ser toda ciencia y cómo ha de ser el método científico. En cierto modo, esta influencia ha sido beneficiosa porque es la responsable de nuestra confianza en el rigor del método científico y en la posibilidad de utilizar tácticas lógicas para obtener conocimiento nuevo a partir del que ya se posee.

Efectivamente, la parte deductiva del método hipotético deductivo es una especie de fósil viviente o supérstite de la creencia antigua de que toda disciplina debía utilizar el método deductivo demostrativo introducido por Aristóteles y que el sabio macedónico pensó como prototipo del pensamiento científico que debían imitar las demás disciplinas. Pero también es verdad que esta influencia ha sido negativa. Cuesta mucho imaginar hoy en día que las ciencias sociales y humanas, como la sociología o la psicología social, pudieran edificarse o desarrollarse con una metodología similar a la de la matemática.

Por todo esto, interesa volver un poco hacia atrás en la historia de la ciencia y formular algunas preguntas, esencialmente *cinco,* acerca de cómo investigadores antiguos y modernos pensaron acerca de la matemática. Tales preguntas son las siguientes:

1) ¿Cuáles son los "objetos" de los que *habla* la matemática? Es decir, ¿qué tipo de entidades estudia esta disciplina? Se trata, como se advierte, de una pregunta de carácter ontológico.

2) ¿Cuál es la fuente del conocimiento de tales "objetos matemáticos" y de sus propiedades? Dicho de otro modo: ¿cuál es el fundamento de la verdad de las afirmaciones de los matemáticos? Estas preguntas tienen mucho que ver con los propósitos de la epistemología.

3) ¿Qué estrategia emplean los matemáticos para lograr nuevos conocimientos, a partir de otros ya obtenidos, en el seno de su disciplina? Aquí estamos en presencia de una pregunta de carácter metodológico.

4) ¿Cómo se debe enseñar la matemática? En particular: ¿cómo se forman los investigadores en matemática y cómo se da a conocer lo que ella puede ofrecer a otro tipo de ciencias y de prácticas? La cuestión es, esta vez, de carácter educativo.

5) ¿Cómo se vinculan los conocimientos matemáticos con las necesidades y objetivos de orden práctico?

Las diferencias de opinión acerca de cómo deben responderse estas preguntas fueron tan marcadas a lo largo de la historia que bien vale la pena hacer un pequeño resumen acerca de las disímiles concepciones de la matemática en distintos períodos. Comencemos, entonces, con lo que al respecto pudo haber respondido un antiguo matemático egipcio, Ahmés.

II

Cinco respuestas sobre la matemática: de Ahmés a Kant

II.1. Ahmés

Quizá la opinión más antigua acerca de la matemática, con las cinco respuestas implícitas a las preguntas que acabamos de formular, pueden ser localizadas en el papiro Rhind, un documento escrito por un escriba egipcio, Ahmés o Ahmose, quien parece haberlo redactado en el siglo XVII a.C. a partir de un documento más antiguo. El escriba no parece ser el verdadero autor de los resultados matemáticos que ahí se ofrecen, sino, más bien, un simple transcriptor. Este tratado en sí mismo no pretende *probar* nada, antes bien constituirse en algo así como un vademécum para ser utilizado en la práctica cuando, por las obligaciones del escriba, era necesario efectuar cálculos o recordar propiedades geométricas. Es oportuno tener en cuenta aquí que Egipto atravesó períodos históricos muy distintos. Fue, entre otras cosas, un centro comercial en el que se intercambiaban mercaderías con pueblos vecinos y, además, como no parece haber existido moneda y estas operaciones se hacían por trueque, cada transacción conformaba un problema práctico de medición de volúmenes, pesos y otras cantidades. Por tanto, la aritmética (e incluso, si se quiere denominarlas de este modo, las *tácticas algebraicas*) no constituía un mero un lujo filosófico planteado por la natural curiosidad humana sino un instrumento que se necesitaba emplear con toda urgencia para realizar tales operaciones comerciales.

Por otra parte, los egipcios parecen haber tenido notables conocimientos de arquitectura, lo que obligaba al uso de nociones y propiedades geométricas. No debemos olvidar, por último, que el Nilo, en su crecida e inundación anual, borraba todas las huellas de límites entre terrenos y obligaba a los propietarios a contratar agrimensores, una profesión que debía ser floreciente en semejante estado, hecho por el cual, también aquí los problemas prácticos de mediciones de figuras geométricas o de cálculo de áreas se transformaban en necesidad y preocupación principal en ciertas épocas del año.

La geometría nació, así, por razones prácticas. Las que hemos mencionado no son seguramente las únicas; por otra parte, es posible que la casta sacerdotal egipcia poseyera algún tipo de conocimiento reservado y esotérico que no se comunicaba a los técnicos y a los escribas, y que era propiedad de aquel sector de la población. Los historiadores de la matemática consideran como bastante probable que la matemática que dominaban los sacerdotes era más sistemática y orgánica que la que nos pinta Ahmés. De todos modos, podemos advertir en las discusiones que nos legó el escriba egipcio que no hay en ellas la menor concepción formalista o abstracta de los "objetos matemáticos", pues en los ejemplos que nos ofrece se refiere a objetos concretos y a alguna de sus características aritméticas o geométricas, tales como la cantidad de panes o la forma de un terreno. También es importante notar que no hay la menor traza de justificación de la verdad de los enunciados que se ofrecen o de la solución de los problemas que se plantean. Podemos suponer que el escriba condensaba una especie de conocimiento práctico obtenido mediante procedimientos inductivos, es decir, al cabo de la observación de muchos casos similares. Un ejemplo es el conocimiento que tenían los egipcios a propósito de la necesidad de trazar perpendiculares para la división de los terrenos: un triángulo de lados *tres, cuatro* y *cinco* es un triángulo rectángulo y, por consiguiente, podía ser utilizado para trazar perpendiculares, lo cual llevó a emplear cadenas de agrimensor que permitían realizar esta operación. No hay trazas de cómo enseñaban la matemática y, en cuanto a la relación de la matemática con la práctica, está muy claro en el papiro Rhind y en otros similares que lo que interesaba a los escribas en materia de matemática era de por sí de naturaleza puramente práctica.

De ser así, observemos lo siguiente: la primera pregunta hubiera sido contestada por Ahmés diciendo que la matemática se ocupa de aspectos concretos de ciertos objetos igualmente concretos, y así como un objeto puede tener color y peso, también puede tener forma y cantidad; es decir, que así como un médico puede estudiar los síntomas de una persona, un geómetra puede hacer lo propio con las cualidades geométricas de una mesa. En tal sentido, los objetos de los se ocuparía un matemático serían de naturaleza concreta y obtenidos a través de la experiencia. Esta versión egipcia de la matemática puede considerarse, en el fondo, como una posición *empirista.* Ciertamente, el conocimiento de las com-

plicadas metodologías aritméticas o de las intrincadas y sabias estrategias geométricas que poseían los egipcios era el resultado inductivo de una práctica antigua y continua en materia de construcciones, de topografía, de agrimensura y de otras actividades de naturaleza práctica. Si hubiéramos preguntado a Ahmés cuáles son las fuentes del conocimiento matemático, hubiera respondido: la observación y la inducción. En otras palabras, habría que observar aspectos concretos de objetos concretos y luego generalizarlos, a modo de ley, mediante el uso continuo de la observación. Si le hubiéramos hecho la tercera y cuarta preguntas a Ahmés, hubiera contestado que el descubrimiento matemático se acrecentará por medio de la capacidad de observación y la de generalización, que deberíamos promover entre nuestros alumnos. En cuanto a la última pregunta, su formulación hubiese dejado atónito a Ahmés, y hubiéramos recibido la obvia contestación de que la matemática es una disciplina que se ocupa de la práctica, pues todo lo que se afirma en ella es relativo a los objetos concretos y a lo que queremos hacer con éstos.

II.2. Pitágoras y Platón

Este punto de vista cambia notablemente con el genial y un tanto pintoresco filósofo y científico griego Pitágoras, quien vivió en el siglo VI a.C. Según Bertrand Russell, era un personaje que unía de manera un tanto curiosa la preocupación por la ciencia, considerada como un notable valor espiritual, con algunas creencias algo supersticiosas acerca de cuestiones religiosas. Lo que Bertrand Russell afirma con cierto ingenio es que Pitágoras fue algo así como una combinación de Albert Einstein y Mary Baker Eddy, la inventora de la *Christian Science,* basada en la vida de Jesucristo. De hecho, los méritos de Pitágoras en el desarrollo de la ciencia son grandes y así podemos encontrar en *Los sonámbulos,* de Arthur Koestler, la afirmación de que el gran concierto interminable de la ciencia se inició con una indicación de un primer director que desató todo ese proceso y que fue precisamente Pitágoras. De ser así, la pitagórica sería la primera y fundacional revolución científica a la que hemos asistido en la historia, punto de vista que el autor de este texto no comparte. Ello no impide reconocer la importancia de la obra de Pitágoras y su escuela, en particular

porque a ella están vinculadas la confianza en la razón y la tradición racionalista en la ciencia. En este sentido, Pitágoras sería algo así como el primer racionalista de la historia de la epistemología de la matemática e incluso de la filosofía por entero.

Pero hay que hacer notar que Tales de Mileto, quien vivió poco antes de Pitágoras, parece haber añadido algo importante en lo que se refiere a la segunda pregunta, acerca de la fuente de la verdad de las proposiciones matemáticas. Tales, en cierto modo, no estaba fuera de la tradición egipcia en materia de matemática, y es posible que parte de su conocimiento en la materia la haya adquirido en una de sus visitas a Egipto. Se trata de un punto que luego, con Aristóteles (siglo IV a.C.), se ampliará hasta transformarse en el corazón del método científico: el papel que en éste desempeña la lógica. Tales hubiera dicho que la fuente del conocimiento matemático radica en la experiencia, la cual permite, por inducción, llegar a las leyes generales de la matemática; pero que luego, por deducción lógica, se adquieren nuevas verdades como conclusiones de razonamientos cuyo punto de partida son aquellas verdades ya obtenidas. Por esto es que muchos historiadores y epistemólogos homenajean a Tales afirmando que fue el precursor de una posición que, si bien no es enteramente racionalista, sí lo es de manera parcial en lo que corresponde al papel de la lógica. La lógica no es, precisamente, uno de los puntos que más preocupan a Pitágoras, si bien, por lo que sabemos de la tradición pitagórica, sus cultores usaban razonamientos y demostraciones. Pitágoras debe ser vinculado, prevalentemente, con el intuicionismo, una tradición que incluirá luego a Platón, quien vivió entre los siglos V y IV a.C. La concepción fundamental de Pitágoras, y que Platón, de alguna manera continúa, es la de que, además del mundo de las realidades concretas y de los objetos que ocupan espacio y tiempo, hay otro mundo de objetos formales a los que Platón denomina *ideas.* Acerca de las ideas, nosotros podemos tener conocimiento directo por medio de la mente y de un acto peculiar de captación que es la intuición racional.

Si se le efectuaran nuestras cinco preguntas sobre la matemática a Pitágoras obtendríamos contestaciones muy distintas de las que le hemos atribuido al escriba Ahmés. A la primera pregunta acerca de la naturaleza de los objetos de los cuales se ocupa la matemática respondería que tales objetos lo son del segundo mundo, el formal, y no del mundo concreto que percibimos con los senti-

dos. Es en ese mundo donde se hallan los números y las figuras geométricas, perfectas y nítidas, tales como círculos, cuadrados y rectángulos. En el primer mundo percibimos objetos concretos que participan aproximada y parcialmente de las cualidades de los objetos abstractos del segundo. Una mesa puede ser rectangular, pero sólo aproximadamente, y un tocón de árbol puede ser circular, pero también aproximadamente. Hay que reconocer que, ante la naciente matemática de aquella época, que en apariencia daba conocimiento nítido, eterno y seguro, la idea que ofrece Pitágoras es notable: nuestro conocimiento de los objetos matemáticos es el conocimiento, por intuición, del segundo mundo, en el que captamos no ya figuras aproximadas y concretas, sino las figuras abstractas o formales en toda su perfección. Por consiguiente, el método que se perfila en Pitágoras ya no puede ser la observación y el conocimiento empírico, sino algo que tiene que ver con el ejercicio de nuestras facultades mentales. La respuesta a la segunda pregunta, vinculada con la fuente de la verdad matemática, invocaría la intuición racional, pues ésta permite a nuestra mente captar las entidades formales o abstractas y conocer cuáles son las leyes que les corresponden. A la tercera pregunta, o sea, cómo hacer para ampliar nuestro conocimiento matemático, y también a la cuarta, cómo enseñar la matemática, la respuesta sería: desarrollando nuestras facultades intelectuales, especialmente la de intuición, y también, aunque en menor medida, nuestra capacidad lógica.

Y, finalmente, a propósito de la pregunta acerca de cómo se vincula la matemática, que se ocupa del segundo mundo, con la realidad cotidiana, que se refiere al primer mundo, Pitágoras parece entender algo que es muy importante: piensa en una especie de isomorfismo o correspondencia entre las propiedades aproximadas de las cosas y las propiedades estructurales rigurosas de los objetos matemáticos.

Por consiguiente, Pitágoras parece haber sido el primero en entrever un método modelístico como los que hoy empleamos en física. Ante determinado problema respecto del mundo físico, podemos pasar por isomorfismo a la estructura matemática correspondiente, aprovechar los algoritmos y métodos matemáticos para resolver nuestros problemas en el ámbito matemático y, una vez resueltos, volver atrás para encontrar cómo se refleja la solución matemática en una solución física. La respuesta de Pitágoras,

entonces, es que la utilidad y la relación que tiene la matemática con el mundo real se debe al isomorfismo aproximado y parcial que hay entre el mundo concreto y el mundo de las entidades matemáticas. Esta idea es importante porque la metodología que de ella resulta se refleja, entre otras cosas, en los procedimientos de medición tal como los practican, por ejemplo, los físicos. ¿Qué hace el físico al medir? Pasa de una estructura concreta (una vara, un terreno) a entidades matemáticas (longitudes, superficies); y luego, con éstas, las medidas que corresponden a las unidades concretas, mediante algoritmos y cálculos, computa y después vuelve atrás: las soluciones matemáticas se transforman en soluciones de su problema físico.

El lector no puede menos que advertir la enorme distancia que hay entre el inductivismo empirista de los egipcios y este racionalismo pitagórico-platónico que pone del lado matemático los procedimientos computacionales de tipo formal. Debemos decir, desde un principio, que, salvo opiniones sostenidas en la antigüedad por Sexto Empírico, por el obispo Berkeley en la época gloriosa de los idealistas ingleses y por John Stuart Mill en el siglo pasado, hasta hace poco tiempo la posición pitagórica parecía tener más influencia y dominar la escena de la filosofía matemática en mucha mayor dimensión que la posición empirista. Pero como indicaremos luego, recientemente, algunos neoempiristas han planteado, por distintas razones, una vuelta a concepciones de corte empirista.

II.3. Aristóteles

Con su *método demostrativo,* Aristóteles ofreció no sólo una metodología básica general para el desarrollo de todas las disciplinas científicas, sino que, en el caso de la matemática, propuso lo que hoy llamaríamos "método axiomático clásico". Éste consiste, de acuerdo con una concepción de la matemática fiel al pensamiento aristotélico, en el cumplimiento de las siguientes etapas:

1) Captación de ciertas verdades matemáticas primarias y simples, que llamaríamos *axiomas,* y adopción de algunas verdades matemáticas a título puramente convencional, los *postulados,* por la razón que ya aducía Aristóteles de que sin tales convenciones no podría desarrollarse la ciencia.

En una palabra, se constituye un punto de partida, mezcla, en general, de un factor principal, la evidencia y la simplicidad con que determinadas verdades se ofrecen a nuestro espíritu y, en algunos casos, la necesidad un tanto provisoria de pensar de cierta manera y no de otra para construir la geometría o la ciencia matemática. Pero esta etapa se aplica sólo a unos poquísimos enunciados, que podríamos llamar los *principios* de la matemática y, en especial, los principios de la geometría.

2) Con el empleo de la lógica, deducir, a partir de aquellos principios, otras proposiciones o enunciados, los *teoremas.*

La matemática, de acuerdo con esto, tiene tres tipos de estrategias: la primera consiste en la captación racional e intuitiva de algunos principios evidentes o supuestos; la segunda, en emplear estrategias lógicas de deducción a partir de los principios, y la tercera, en la obtención, como subproducto de nuestra actividad lógica, de los teoremas, verdades matemáticas que pueden conseguirse en número potencialmente infinito. Desde luego, esto no significa que *todas* las verdades que así pueden obtenerse son igualmente interesantes, por lo cual la atención humana se pondrá al servicio de aquellas que sean más relevantes y de aplicaciones más valiosas para la práctica.

Si formuláramos a Aristóteles la primera pregunta que hemos planteado a Ahmés o a Pitágoras, su contestación, según se desprende del libro llamado *Categorías,* sería que los objetos matemáticos son propiedades abstractas que expresan o generalizan propiedades o cualidades concretas de los objetos concretos. Esto es una pequeña vuelta atrás, más cercana, por cierto, a Ahmés que a las posiciones pitagóricas, con la diferencia de que Aristóteles reconoce que existen *conceptos* abstractos (y no *objetos* abstractos), y que es necesario el concurso del pensamiento para ir más allá de los ejemplos particulares y llegar a regularidades y leyes generales. En cuanto a la segunda pregunta, afirma en los *Primeros analíticos* y en los *Segundos analíticos* que la fuente de la verdad de la matemática para los axiomas es la intuición racional y, en todo caso, para las convenciones que nos brindan postulados. Todo lo demás se obtendría por medio de la deducción lógica. Con relación a la tercera y cuarta preguntas, aclaremos que Aristóteles considera muy útil la experiencia como uno de los caminos que despiertan nuestras facultades intelectuales y los estados de evidencia. En lo que respecta a las aplicaciones prácticas de la ciencia

(quinta pregunta), hay que tener en cuenta lo que hemos afirmado acerca de que las propiedades a las cuales se está refiriendo Aristóteles son las propiedades de las cosas mismas.

Conviene, en este punto, aclarar las diferencias entre las *ideas* de Platón y los *conceptos* de Aristóteles. Para Platón, las ideas están ontológicamente constituidas por objetos del segundo mundo; son objetos y, en algún sentido, objetos que existen en su mundo con total independencia de las cosas del primer mundo, e incluso existirían aunque no hubiese cosas en este último. Por ejemplo, para Platón, el "número 3" es una entidad que existe, eterna, nítida y en forma segura, en el segundo mundo aunque no hubiera ternas en el primero, y aun si no hubiese existido este mundo en el que estamos inmersos. Pero no es éste el pensamiento de Aristóteles. Las ideas, para Aristóteles, o como él las llamaría, los *conceptos,* parecen ser el resultado de tener en cuenta ciertos aspectos de las cosas del primer mundo. Estos aspectos se pueden encontrar repetitivamente (por lo cual podemos decir que el azul se encuentra en esta flor y en el cielo y en aquella tela), pero en cada una de las ejemplificaciones se trata de un aspecto concreto de objetos concretos. Esto significa que no encontraríamos el azul si no existieran los objetos concretos de color azul. Por un acto de abstracción o de "separación" (como decían los escolásticos medievales) es posible llegar al concepto separando, en un ejemplo concreto, todo lo que no corresponde a ese aspecto y dejando únicamente aquél que constituye el concepto. Una flor azul tiene muchísimas características, pero si separamos todas ellas y conservamos únicamente su matiz, tendremos el aspecto azul, que es el concepto de azul que podemos encontrar ejemplificado en cualquier otro objeto que lo posea.

Si quisiéramos hablar más rigurosamente, deberíamos decir que, para Platón, una idea no está presente en la cosa, sino que la cosa *participa* de la idea, una manera de decir que en el objeto hay algo así como una réplica o acercamiento de lo que es la idea en sí misma. Esto, para Aristóteles, no es así. Los conceptos están en las cosas mismas y se obtienen de ellas, y si no hubiera existido un mundo real no hubiera sido posible la abstracción a partir de la cual se obtuvieron los conceptos. En cierto modo, Aristóteles no quiere aceptar el segundo mundo y piensa, con un cierto tipo de sensatez espontánea, que hay un solo mundo real, éste donde estamos, y que es aquí donde están las cosas y sus aspectos. És-

tos son captados por nosotros haciendo una operación sobre las cosas de este mundo; entonces, Aristóteles no puede limitarse, como en la tradición pitagórica, a aconsejar, a propósito de la tercera pregunta, el perfeccionamiento de nuestra capacidad de intuición de los objetos del segundo mundo para el progreso de la matemática. No es que Aristóteles rechace el empleo de la razón con respecto a los conceptos para que podamos pensar matemáticamente, sino que considera que lo importante es que los primeros conceptos con los que el ser humano tiene que tratar para formar gradualmente su equipo de conceptos destinados a entender el mundo son sugeridos por los ejemplos acerca de los cuales los actos de abstracción tienen referencia. Por consiguiente, aun en matemática, la experiencia concreta y la observación desempeñan un papel "despertatorio" que se relaciona con nuestros actos de abstracción y con la formación de nuestro conocimiento. Lo que no parece estar del todo claro es cómo Aristóteles acepta (si es que lo acepta) que pudiéramos llegar a tener conceptos que no provinieran de la abstracción y que pudieran, por ejemplo, originarse por combinación o estructuración de varios conceptos diferentes.

Esta idea se asemeja, sorprendentemente, a otra que será sustentada luego, en el siglo XVIII, por el filósofo alemán Immanuel Kant, de quien volveremos a hablar más adelante. Kant parece pensar que los conceptos no se obtienen por abstracción sino que, de alguna manera, resultan de un aparato preimpuesto para nuestra experiencia en el que puede haber un factor constructivo. A Kant no le causaría ninguna dificultad aceptar conceptos que no se hubieran obtenido por abstracción, sino que pertenecieran a un equipo innato de conceptos puros de nuestro entendimiento. Pero también debemos hacer notar la diferencia entre Kant y Platón. Para Kant los conceptos son como hormas vacías que de alguna manera poseemos para colocar en ellas los fenómenos e imponerles cierto tipo de estructura, pero no son objetos; en tanto que, para Platón, los objetos matemáticos son genuinos objetos y tienen tanto derecho a ser tratados lógicamente como tales para predicar propiedades de ellos, para contarlos o para hacer ciertas operaciones que realizamos con los objetos concretos, como cualquier otro individuo que nuestra ontología encuentre. Y si bien es cierto que no es posible dividir un número con un cuchillo, tampoco es posible descomponer en factores primos una cacerola; de mo-

do que hay distintas categorías de objetos y eso impone distintas operaciones que podemos hacer sobre ellos. El problema que se plantea en la matemática es si los objetos en los que Platón piensa son indispensables. ¿Hay que admitir, realmente, que las figuras son objetos y que los números son objetos para contar con una disciplina matemática? ¿No será posible hacer matemática sin esta presuposición? Como veremos, hay propuestas en este sentido que darían razón al conocido aforismo de Guillermo de Occam: "No hay que multiplicar las entidades innecesariamente". Si podemos construir la matemática sin admitir los objetos especiales del segundo mundo de Platón, parecería prudente no hacerlo. No obstante, reconocemos el derecho democrático de un platónico de decir: "No serán necesarios, pero tenemos el convencimiento filosófico de que existen". En este sentido, Platón y los platónicos sólo tendrían que convencernos de su existencia. Dicho sea de paso, podemos hacer una observación final de nomenclatura: algunos filósofos prefieren reservar la palabra *existencia* para los objetos del primer mundo, mientras que para los del segundo emplean la palabra *subsistencia,* una manera de *ser* en un sentido fuerte y legítimo de la palabra que no implica ocupar lugar en el espacio y el tiempo.

Lo que acabamos de decir refuerza la posible contestación de Aristóteles a la quinta pregunta, porque muestra de manera clara por qué, para él, aun la matemática, que parecería ser un ejemplo de una teoría particularmente abstracta, está relacionada con la experiencia, y por qué sus conceptos no dejarían de ser, de algún modo, el resultado de una abstracción de las propiedades de los objetos concretos y de algunas de sus cualidades. Es por esto precisamente también que la matemática es indispensable para la práctica y para la tecnología, cosa que no tendría que ser evidente en el caso pitagórico, salvo por el presupuesto, un tanto casual, de que el mundo real se parece al segundo mundo. En realidad, habría también aquí que hacer un desafío metafísico y preguntarle a Platón por qué el segundo mundo tiene que ser isomórfico, parcial o totalmente, al primero. Aunque, al comprobar cómo razonan ciertos personajes, políticos y funcionarios, podría tenerse la impresión de que el segundo mundo que se les presenta en su pensamiento no tiene nada que ver con la realidad, y es por eso que sus acciones son fracasadas o ineficaces, como muchas veces lo sugieren los escépticos.

II.4. Euclides

El libro geométrico y matemático más famoso de la antigüedad, que por fortuna se ha conservado excepcionalmente intacto, es los *Elementos,* de Euclides, matemático que floreció hacia el año 300 a.C. en Alejandría. Este tratado sería, de acuerdo con ciertos historiadores de la ciencia como Thomas Heath, un ejemplo paradigmático del modo de pensar aristotélico. De hecho, las nociones comunes y los postulados con los que Euclides comienza su libro corresponderían a los axiomas y a los postulados de Aristóteles. En cuanto a los aspectos deductivos de los *Elementos,* serían los que llevan a Aristóteles a sus teoremas. Quizás esta sea una versión un tanto idealizada y exagerada por parte de tales historiadores. Un simpatizante del pragmatismo o del materialismo dialéctico podría tener una gran propensión a subrayar, más que los aspectos demostrativos, el hecho de que Euclides propone problemas e indica cuál es su solución. Lo que no puede negarse es que la idea de sistematizar la geometría a partir de principios, y utilizando desarrollos deductivos, que es la esencia del método aristotélico, está ejemplificada en el libro de Euclides. A través de él, Euclides ejerció una influencia paradigmática en el suceder de las investigaciones matemáticas hasta el presente, no sólo en cuestiones matemáticas sino también en física, en filosofía y en jurisprudencia. Bastaría pensar que hasta fines del siglo XIX los *Elementos* de Euclides se utilizaron como texto para el aprendizaje de la geometría, y que, incluso hoy, una versión modificada de sus primeros libros constituye la base de la enseñanza de la geometría plana en ciertas escuelas secundarias.

Euclides sería entonces una culminación de las ideas metodológicas de Aristóteles, aunque es muy probable que éste haya empleado ciertas nociones acerca de la estructura de la ciencia de la matemática de otros geómetras inmediatamente anteriores a él, en particular de Teetetos y, sobre todo, de Eudoxio. Éstos, al parecer, ya habían conseguido una cierta axiomatización de la matemática. Pero antes de dejar a Euclides y pasar a otras etapas más cercanas a la nuestra, quisiéramos hacer notar las dos influencias que nos ha legado la matemática griega. Por una parte, la pitagórica, en lo que respecta a la existencia de ciertos "objetos perfectos" y la importancia que se le asigna en esta tradición a los aspectos computacionales. (Inclinado naturalmente más hacia la teoría de

los números que hacia la geometría, Pitágoras afirmó que "el número es la esencia de todas las cosas".) Por otra parte, la de Aristóteles que, por cierto, está mucho más cercana a la de la geometría. De allí en más, la aritmética siempre pareció ser un malabarismo computacional con objetos numéricos, en tanto que la geometría se presentaba como un edificio con fundamentos, desarrollos y pruebas. En el pensamiento matemático y en la metodología de la matemática comprobamos la existencia de ambas influencias en todas las épocas, con distinto predominio de una u otra en distintos momentos históricos. En rigor, incluso en la actualidad se advierten ambas influencias. El llamado "método axiomático", al que luego nos referiremos, parece ser una herencia de la tradición aristotélica, en tanto que los métodos computacionales, que dominan muchas de las estrategias de la matemática necesarias para la práctica y para la física, o bien en informática y en la teoría de las computadoras, parecen corresponder, por el contrario, a la tradición pitagórica.

Observemos finalmente que, en el propio campo de las ciencias fácticas, el método hipotético deductivo parece ser, en cierto modo, una especie de "caricatura" del método axiomático propuesto por Aristóteles. La diferencia radica en que, en lugar de principios necesarios por su evidencia, se trabaja con hipótesis y conjeturas; pero en estas teorías hipotético-deductivas, sobre todo en física, la presencia de la matemática y de las computaciones como arma auxiliar para la deducción parecen ser también factores muy importantes.

II.5. Kant

En este punto será necesario practicar un "salto histórico" de más de dos milenios para referirnos a Immanuel Kant, filósofo del siglo XVIII que ya hemos mencionado. Su postura, es necesario destacarlo, no es para nada desechable en nuestra época por cuanto muchas corrientes epistemológicas, por distintas razones, la han aceptado parcial o aun totalmente. Su teoría intuicionista del conocimiento tiene aspectos en común con la de la tradición pitagórico-platónica, por cuanto Kant también aceptaría la intuición como fuente de conocimiento matemático. Pero Kant indicaría que los objetos matemáticos, en realidad, corresponden a cons-

trucciones o elementos de carácter psicológico de los que disponemos, por nuestra naturaleza, como instrumentos para poder imponer orden y sistematicidad a los fenómenos y tratar biológicamente con ellos.

La geometría en Kant es una forma de sistematizar los fenómenos y, si se quiere, podemos concebir al espacio como un "objeto", pero éste sería más parecido, si se nos permite la metáfora, a un estante que a uno de los libros que lo ocupa. Parece ser un dispositivo mediante el cual se pueden ubicar las entidades y, por consiguiente, al igual que los libros en una biblioteca, encontrarlas y utilizarlas cuando se las requiera. Lo mismo ocurre con los números, que parecen estar indisolublemente ligados a nuestra intuición del tiempo; y hay que recordar que el tiempo, al igual que el espacio, es también una de las formas estructurales preimpuestas a nuestra experiencia para tratar con ella.

Con este tipo de concepción, a la pregunta acerca de *qué son* los objetos matemáticos, Kant contestaría que son elementos de nuestro aparato perceptual o de nuestro sistema categorial que nos permiten ordenar y tratar con los fenómenos concretos. A la pregunta de cuáles son las fuentes de las verdades matemáticas, la respuesta de Kant sería: la intuición, la contemplación, pero no como en el caso de Platón, de objetos de una realidad distinta a la concreta, sino de las propiedades de nuestro sistema psicológico de ordenación de los fenómenos. Y como somos los más privilegiados para poder contemplarlos directamente, con inmediatez, porque forman parte de nuestro propio aparato perceptual o racional, el tipo de verdad matemática se impone a nosotros con una fuerza y una necesidad que no poseen, por cierto, las verdades cuya fuente está en la experiencia. Se trata de lo que Kant denomina "verdades a priori", para distinguirlas de las "verdades a posteriori", que provienen de la experiencia. Las verdades a priori provienen de la peculiar estructura que posee nuestro aparato psíquico como condición preimpuesta para la sistematización de nuestras percepciones de los fenómenos.

A la tercera y cuarta preguntas, respecto de la posibilidad de extender el conocimiento matemático y enseñarlo, la respuesta de Kant no sería muy distinta de las de Pitágoras o de Platón. Y en cuanto a las relaciones de la matemática con la experiencia, Kant diría que tal relación existe y en un sentido muy parecido al que pusimos en boca de los empiristas. Sin embargo, para Kant, los

verdaderos objetos reales, los *noúmenos,* son incognoscibles, porque la única información que tenemos son los fenómenos mismos, y éstos son algo así como manifestaciones indirectas de los verdaderos objetos. Para colmo, están sistematizados, conceptuados y esquematizados según nuestro aparato perceptual y nuestro sistema categorial, el sistema que proporciona los conceptos mediante los cuales los fenómenos son unidos y esquematizados formando objetos físicos. Los objetos físicos no corresponden a nada real: son construcciones nuestras a partir de los fenómenos.

En este sentido, la matemática, que corresponde en parte a nuestro sistema perceptual y a su modo peculiar de estructuración, y, en parte, a nuestro sistema de construcción de conceptos, el sistema categorial, estaría estrechamente conectada con nuestra experiencia y con los objetos de la experiencia, pero no con los objetos en sí. La matemática es importante para la práctica, para la tecnología y, en general, para todo lo que esté relacionado con los fenómenos, pero en el sentido de que está conectado con nuestro mundo, el que hemos podido construir con las propias percepciones y categorizaciones. Pero no podemos saber, argüiría Kant, si el mundo real de los objetos en sí consta de propiedades tales que la matemática seguiría siendo imprescindible para entenderlo o si habría que acudir a otro tipo de estructuración del conocimiento. De todos modos, hay que hacer notar que, pese a la diferencia entre el punto de vista kantiano y el aristotélico, ambos tienen algo en común acerca de las verdades matemáticas. El primero centra en el sujeto y en su aparato cognoscente el origen de la verdad científica (o al menos, del conocimiento científico) mientras que el segundo supone que el conocimiento se relaciona de manera íntima con la naturaleza de las cosas; sin embargo, tanto para Kant como para Aristóteles, los enunciados de la matemática, aquellos que consideramos verdaderos, probados y verificados, tienen carácter de necesarios, en el sentido de que sabemos que son verdaderos pero sabemos también que no podrían ser de otra manera. Es verdad que el carácter de necesidad para Aristóteles parece ser metafísico y corresponder a la naturaleza de las cosas, en tanto que, para Kant, sería más subjetivo y está relacionado con el modo peculiar en que se conforma nuestra naturaleza humana. Pero la matemática sería, para ambos, no solamente un conjunto de enunciados verdaderos, sino *necesariamente* verdaderos, algo que va a ser puesto en tela de juicio en el siglo XIX.



Las geometrías no euclideanas

Las dificultades de la tradición clásica en todas sus variantes (menos la que corresponde a la primitiva posición empirista de Ahmés) comenzaron en 1826, en que aparece un célebre escrito del matemático ruso Nikolai Lobachevsky, una memoria presentada a la Universidad de Kazán, y se produce en la historia de la matemática algo que puede considerarse (según el temperamento optimista o pesimista que poseamos) como una revolución o como un accidente. Nos referimos a la aparición de las llamadas "geometrías no euclideanas".

No queremos aquí relatar la historia de todo este proceso. Digamos brevemente que Euclides, en el primer libro de los *Elementos,* basa la construcción de la geometría en cinco postulados, de los cuales el quinto es el que hoy se denomina, según las formulaciones actuales del mismo, el postulado o axioma "de las paralelas". Afirma que, dados una recta en un plano y un punto del plano exterior a la recta, pasa por el punto una y sólo una recta paralela a la recta dada. No es éste el enunciado que ofrece Euclides, pero el anterior es equivalente y más sencillo. Resultó que a los geómetras posteriores este postulado no les resultaba tan intuitivo, evidente y simple como los otros que proponía Euclides. Curiosamente, se tiene la sensación de que al propio Euclides el quinto postulado le causaba cierto rechazo, y eso lo prueba la circunstancia de haberlo usado en su texto una sola vez en la demostración del teorema XXIX que afirma, entre otras propiedades, la igualdad de los ángulos alternos internos entre paralelas. Por ello, un tanto irónicamente, se ha llamado a Euclides "el primer geómetra no euclideano".

Que se acepte un postulado para ser usado una sola vez en un texto parece algo así como un dispendio exagerado o un abuso, como sería, en una mitología, no sólo aceptar el dios del sol, el de las nubes, el de la lluvia, el del mar, sino también un dios especial para explicar cómo Su Majestad se curó el resfrío un cierto y determinado miércoles a la tarde. Un axioma tal parecería, realmente, estar fuera de lugar en el Olimpo de las verdades primeras, y

esto es lo que debe haber motivado que Euclides no lo haya querido usar, en la medida de lo posible. Claro que con que lo haya usado una sola vez para demostrar un teorema y que ese teorema luego haya sido utilizado varias veces para demostrar otros teoremas implica que, de alguna manera, la influencia de ese axioma es mucho mayor que lo que aparenta de manera explícita.

De todos modos, durante siglos y siglos parece haber existido una suerte de deporte, que practican desde Posidonio (siglo I a.C.) y Proclo (siglo V) hasta Karl Friedrich Gauss, en el siglo XIX, y que consistió en intentar demostrar que el quinto postulado era dispensable, es decir, que todo lo que se conoce en geometría surge a partir de los restantes cuatro postulados. En particular, de ser así, el controvertido postulado surgiría como un mero teorema. Es oportuno aclarar en este punto que los cinco axiomas de Euclides, incluido el quinto, no son realmente suficientes para obtener todo lo que se admite hoy como conocimiento geométrico, ni siquiera para obtener todo aquello que Euclides presentaba como teoremas. Esto es así porque Euclides, a veces de manera no explícita, utilizaba presupuestos que no se desprendían de sus postulados. Por ejemplo, no es posible deducir de los cinco postulados que si unimos un punto interior a un círculo con uno exterior, el segmento así construido corta al círculo. Para obtener como teorema este enunciado es necesario agregar al sistema de Euclides otro postulado llamado "de continuidad".

La última tentativa para llegar a extraer como teorema el quinto postulado la hizo Lobachevsky en el trabajo ya citado; el otro protagonista de esta historia es Janos Bolyai, quien, en Budapest, hacia 1823, había tenido una idea similar aunque su primera publicación data de 1832. Lo que ambos intentaron fue obtener una *demostración por el absurdo* del quinto postulado, es decir, construir un sistema de suposiciones con los cuatro primeros axiomas de Euclides con el agregado de la *negación* del quinto postulado, con la esperanza de que, a partir de este sistema de cinco suposiciones, se obtuviese una contradicción del tipo *A y no A*. Esta última, como ya había señalado Aristóteles en su lógica, es forzosamente falsa ("principio de no contradicción"), de lo cual resultaría la falsedad de la negación del quinto postulado y, por tanto, la verdad del mismo.

Procediendo de este modo, Lobachevsky y Bolyai avanzaron deductivamente en busca de la esperada contradicción, pero ésta

no aparecía. Los primeros teoremas que se obtenían eran idénticos a los de Euclides, porque para producirlos no era necesario el quinto postulado. De hecho, lo que ocurrió es que, sin que se presentara ninguna contradicción, comenzaron a aparecer teoremas "extraños", totalmente alejados de la intuición. Por ejemplo: "la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos" o bien "por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela a dicha recta". Otro inquietante teorema afirmaba que, si dos figuras son semejantes, es decir, tienen los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales, son iguales, lo cual implica que no existen figuras semejantes de distintos tamaños. Esto implicaría que no podrían existir mapas o reproducciones en escala, porque éstos presentarían deformaciones con relación al objeto que se reproduce. (O sea que si un enamorado, al partir de viaje, quisiera llevarse el retrato de su amada sin deformaciones, tendría que llevarse uno de tamaño natural.) Pero si bien tales teoremas parecen inaceptables desde el punto de vista de nuestra intuición, no proporcionan una demostración por el absurdo. Por cierto que en el sistema de Euclides dichos enunciados son falsos, pero este nuevo sistema, construido a partir de las cinco suposiciones mencionadas, no es el de Euclides sino una especie de "caricatura negativa" del mismo. La única esperanza hubiera sido obtener una contradicción, porque las contradicciones son falsas no por razones geométricas sino por razones lógicas; pero el hecho es que Lobachevsky y Bolyai obtuvieron una cantidad no exagerada pero alta de "teoremas" no contradictorios.

Esto plantea el siguiente problema: ¿no aparecen contradicciones porque no las hay entre todos los teoremas o porque no han aparecido hasta el momento? Después de todo, deducciones podría haberlas de cualquier longitud y la primera contradicción que podría aparecer esté tal vez escondida en un futuro lejano. El rasgo genial de Lobachevsky y Bolyai fue el de pensar que tal teorema contradictorio no existía y que se estaba ante un tipo de juego, y a la vez de una estructura lógica donde las suposiciones iniciales podrían entenderse como absurdas o paradójicas, al igual que los teoremas, pero que, desde el punto de vista de la contradicción, no conducían a nada lógicamente reprochable. Como se comprende, la situación era un tanto perplejizante. Esta estructura lógica que así se obtiene, ¿qué representa? En un cierto sentido, el sistema obtenido semejaba una geometría, o quizás una

parodia de geometría, en la cual los conceptos que se utilizaban estaban expresados con palabras semejantes a las de la geometría tradicional, con sus peculiares principios, suposiciones iniciales y deducciones a partir de estos principios, desde los cuales se arribaba a teoremas un tanto perplejizantes o paradójicos, pero no contradictorios.

¿Qué representaba, desde un punto de vista filosófico o científico, lo que Lobachevsky y Bolyai habían hecho? El punto no estaba claro ni siquiera para los propios autores. Éstos hablaron de "geometría imaginaria", pensando que, como en la vieja geometría tradicional, también aquí se mencionaban objetos, pero no reales o legítimos (aun en sentido platónico) sino creados en nuestro pensamiento por nuestra imaginación, artificialmente. Cabría mencionar aquí la idea del famoso filósofo alemán Edmund Husserl, creador de la fenomenología, acerca de las "ontologías regionales", cada una formada por objetos con sus peculiares características. En este sentido, la geometría euclideana sería una peculiar ontología regional, en tanto que la geometría de Lobachevsky y Bolyai definiría otra. La diferencia, tal vez, es que la primera tendría relaciones con lo concreto o se vincularía con lo concreto a través de un isomorfismo, como lo pensaba Pitágoras, en tanto que esta ontología regional en la que estarían pensando Lobachevsky y Bolyai tendría solamente efectos para los curiosos o los que quieren construir un juego puramente formal. De hecho, lo que finalmente empezó a imponerse en el campo de la matemática era la idea de que un sistema geométrico como el que Lobachevsky y Bolyai estaban introduciendo, y que desde entonces es una variedad de lo que se conoce como "geometría no euclideana", no sería más que una estructura lógica formada por una serie de suposiciones iniciales, razonamientos correctos a partir de esas suposiciones y teoremas obtenidos en virtud de estos razonamientos. Por ser un ejercicio lógico, tal estructura tendría un interés puramente formal, y lo único que se requeriría para su aceptación es la corrección de los razonamientos.

Conviene recordar aquí que, según los lógicos, los razonamientos son correctos o incorrectos, es decir, tienen o no la garantía de conservación de la verdad de las premisas a la conclusión por su forma y no por su contenido. Esto significa que si las premisas son ciertas y la forma es correcta, la conclusión tiene que ser cierta también; sin embargo, el razonamiento puede ser co-

rrecto y sus premisas no ser verdaderas. (Por ejemplo: 2 + 1 = 8, 8 = 3, por consiguiente, 2 + 1 = 3.) La corrección de un razonamiento puede expresarse mediante lo que se llama *forma* de razonamiento, esquematizada con variables. Para aclarar esto al lector, recordemos el viejo silogismo: "Todos los hombres son mortales, todos los griegos son hombres, por consiguiente, todos los griegos son mortales". Agreguemos éste: "Todos los músicos son artistas, todos los flautistas son músicos, por consiguiente, todos los flautistas son artistas". Y finalmente: "Todos los africanos son americanos, todos los argentinos son africanos, por consiguiente, todos los argentinos son americanos". Los tres silogismos no son idénticos, por cuanto su temática es distinta y, para colmo, en el tercer ejemplo, las dos premisas que se han tomado son falsas, a diferencia de los ejemplos primero y segundo donde las premisas son verdaderas. No obstante, los tres ejemplos tienen la misma forma, la misma disposición, ordenamiento y repetición de los términos que encontramos en cada uno de ellos. Y esto puede ponerse en forma explícita, como ya lo notó y lo hizo el propio Artistóteles. Si en lugar de los términos denotativos que figuran en los ejemplos ("griego", "flautista", argentino", etc.) utilizáramos lo que los lógicos llaman letras variables, tales como *x, y, z,* tendríamos entonces: "Todos los *y* son *z,* todos los *x* son *y,* por consiguiente, todos los *x* son *z*". Esto se denomina una *forma de razonamiento,* porque aquí no hay premisas y conclusión. Para que las hubiere, tendríamos que quitar las letras *x, y, z* y poner en su lugar palabras "de carne y hueso" que expresaran algún concepto genérico. Si reemplazáramos "griego", "hombre" y "mortal" en el primer ejemplo, o "flautista", "músico" y "artista" en el segundo, o "argentino", "africano" y "americano" en el tercero, en lugar de *x, y, z* respectivamente, tendríamos ejemplificaciones obtenidas a partir de la forma, y es por esto que decimos que los tres ejemplos tienen la misma forma. Las letras *x, y, z* se denominan variables no porque ellas varíen, sino porque podemos variar, de manera arbitraria, los reemplazos "de carne y hueso" que producen los ejemplos concretos. Decimos que la forma es correcta porque a partir de ella no se obtendrá jamás ejemplo alguno de premisas verdaderas y conclusión falsa.

Si esto es así, podemos volver a la geometría de Lobachevsky y Bolyai, y entender que las palabras "punto", "recta", "plano", "pasar por", "entre" y "distancia", que se usan en este discurso, son

ahora como la *x,* la *y* y la *z* del ejemplo silogístico anterior, o sea, que no se están tomando seriamente como nombres de algo especial, sino que tienen su denotación abierta. Por ello, podríamos darles cualquier interpretación y en cada una de ellas, si las premisas se hacen ciertas y se ha cuidado que la forma de los razonamientos utilizados para las demostraciones sea correcta, se obtendrán teoremas verdaderos. La geometría no euclideana sería algo así como un "esquema de geometría" que, según el sentido que demos a las palabras, podrá transformarse en un ejemplo concreto de discurso. En éste, en la mayoría de los casos, las suposiciones iniciales no se harán ciertas (o al menos no todas), pero podría acontecer que hubiese algún ejemplo donde todas ellas se satisficieran. Si así fuese, también serían ciertos los teoremas porque se ha realizado una deducción correcta. En esta estructura lógica en la que en el discurso hay palabras a las que les falta la denotación, las oraciones no son genuinas proposiciones o enunciados, que pueden ser verdaderos o falsos, pues su verdad o falsedad dependerá del significado que demos a las palabras que estamos utilizando.

De hecho, una estructura tal se parece a un juego lógico que tiene alguna vinculación con el ajedrez. En el ajedrez tampoco sabemos exactamente a qué nos estamos refiriendo con las fichas (lo que sí sabemos es cómo moverlas), y nadie en su sano juicio creerá que está aprendiendo política monárquica porque mueve el rey, la reina y sus peones. El haberlas llamado "rey", "alfil" o "torre" es un homenaje a la tradición; del mismo modo, en la geometría no euclideana las palabras "punto", "recta", "plano", etc. no tienen ningún significado. Semejante metodología se conoce como *método axiomático formal,* o simplemente *método axiomático,* y el juego que hemos descripto en particular es un ejemplo de lo que se llama *sistema axiomático.* Lo que se ha hecho con la geometría no euclideana podría hacerse, en realidad, de manera puramente arbitraria, tomando un vocabulario arbitrario (pero sin significado) y, con las reglas gramaticales usuales, construir "esquemas de proposiciones" o "cuasiproposiciones" (porque no son realmente proposiciones) y adoptar algunas de ellas como "axiomas", o sea, puntos de partida del juego, y luego, razonando correctamente, obtener "teoremas". Se comprende que procediendo de este modo la cantidad de juegos posibles, es decir, de sistemas axiomáticos, es infinita.

IV

Los sistemas axiomáticos

Quizás el lector piense, y no le faltará razón, que lo que acabamos de describir no corresponde realmente a algo que merezca el nombre de "metodología de la ciencia". En realidad, parecería tratarse más bien de una manera de inventar juegos lógicos para aquellos que tienen la afición, como la tenía por caso Lewis Carroll, de crear paradojas y problemas con el fin de divertirse. Es verdad que entre los matemáticos existe gran cantidad de individuos cuya psicología les hace divertirse, y aun llegar al éxtasis, desarrollando distintos juegos de esta naturaleza y estableciendo, como consecuencia, teoremas sumamente curiosos. La cuestión adquiere mayor seriedad si se piensa que las suposiciones iniciales de un sistema axiomático describen, indirectamente, ciertas estructuras posibles, y que tanto los "axiomas" como los "teoremas" indican propiedades de esas estructuras. De hecho, todo esto es lógica aplicada, es decir, la investigación acerca de qué consecuencias se pueden obtener de suposiciones arbitrariamente establecidas. Pero, si esto fuera todo, se llegaría a una idea equivocada acerca de la utilidad del método. ¿Por qué? Porque estos esquemas, estas geometrías esquemáticas, estos juegos, pueden transformarse en ciencias "en serio" si se da a los términos sin significado que figuran en ellos un sentido determinado, en cuyo caso estos *sistemas axiomáticos formales* se transformarán en *sistemas axiomáticos interpretados.* Esto significa que los axiomas se transformarán, realmente, en enunciados de partida, y los teoremas se transformarán en enunciados del sistema interpretado. En este sentido, los sistemas hipotético deductivos serían sistemas axiomáticos interpretados.

Consideremos, como ejemplo, el sistema hipotético deductivo que conforma la llamada "teoría mecánica de Newton", en la que aparecen leyes físicas tales como la de inercia o la de masa. Si a los términos "fuerza", "masa", "aceleración" y otros les quitamos su sentido y los entendemos como meras palabras huecas, es evidente que la física newtoniana se transforma en un sistema axiomático formal, lo cual no impide ni cambia el hecho de que los

"teoremas" de la física newtoniana (llamados, en el sistema hipotético deductivo, "hipótesis derivadas") sigan siendo "teoremas" del sistema axiomático formal así obtenido.

Esto último muestra una cierta vinculación entre el método de las ciencias fácticas y el curioso método que irrumpe en la matemática en el momento histórico en que aparece la obra de Lobachevsky y Bolyai. Los sistemas hipotético deductivos de la física son sistemas axiomáticos interpretados que tienen como esqueleto lógico sistemas axiomáticos formales, aquéllos que, dando determinada interpretación a sus palabras huecas (que actúan como variables), se transformarían en el sistema hipotético deductivo. En tanto no se haga la interpretación, un sistema axiomático formal es un discurso que no tiene significación. Está construido según las reglas de la lógica y es, como ya hemos dicho, algo así como un esquema de discurso, pero no es, realmente, un discurso. De acuerdo con una nomenclatura muy usada en lógica y en lingüística, un sistema axiomático sería, en realidad, un ejemplo de *sistema sintáctico* o de *lenguaje sintáctico:* aquél en el que hay signos, letras o expresiones sometidas a ciertas reglas morfológicas que permiten formar con ellas expresiones gramaticalmente correctas y, además, reglas de deducción que permiten producir deductivamente algunas de ellas a partir de las otras.

Pero un sistema sintáctico, de todos modos, no tiene poder informativo alguno, porque no habla de nada ni tiene significado. Esto no es un capricho excéntrico, como en principio podría pensarse. En cierto modo, un cálculo matemático es muchas veces eso: un manipuleo de signos y expresiones que no tiene en cuenta significados sino, simplemente, propiedades formales. Pero en ciertos casos, se quiere emplear este cálculo con un fin informativo específico, ya se trate de un problema de contabilidad, de astronomía o de demografía, y entonces tales cálculos adquieren una importancia especial, ya que se pueden transformar en *sistemas semánticos.* En éstos, los signos, reglas morfológicas y deducciones están presentes, pero, además, hay *significación* en el sentido de que muchos de los términos ahora denotan o tienen referencia a objetos, entidades o procesos que son del interés particular del campo de aplicación o disciplina de que se trate.

Por consiguiente, no sería equivocado replantear lo que ocurrió en el momento en que irrumpieron las geometrías no euclideanas diciendo que la matemática trata con sistemas axiomáticos, es

decir, sistemas sintácticos o de discurso sin significación determinada, aunque bien formados gramaticalmente y en los cuales es posible aplicar reglas de deducción. Metafóricamente hablando, ello sería como disponer de un almacén infinito de estructuras posibles en el que cada anaquel está ocupado por un sistema que describe una estructura, a la cual, a su vez, se la podrá o no encontrar ejemplificada en la realidad. En este sentido, la labor del matemático es la de estudiar cuáles de esas estructuras son posibles y cuáles no lo son. Esto definiría el campo de la llamada "matemática pura". La "matemática aplicada", en cambio, consistiría en el descubrimiento de que ciertas estructuras que se encuentran en la realidad física, biológica, sociológica o económica constituyen ejemplos de aquellas estructuras posibles. ¿Cómo se lograría esto último? Mediante un diccionario que proporciona la interpretación del sistema axiomático. Este diccionario asignaría a cada palabra, a cada variable, un significado, elegido dentro del campo en el cual queremos encontrar la aplicación, y así obtendríamos el sistema axiomático interpretado, que estaría ahora hablando de algo en particular y ya no sería un discurso "vacío". Desde luego, no sabemos a priori si este discurso habla "con verdad" o "con falsedad" acerca de la realidad, pero eso es harina de otro costal, pues decidirlo es asunto que compete a la metodología de las ciencias fácticas, como la física o la biología.

En la nomenclatura que utilizan los matemáticos, si se interpreta un sistema axiomático y los axiomas (en la interpretación) se transforman en oraciones o enunciados verdaderos, se dice que se ha encontrado un *modelo* del sistema axiomático. La palabra "modelo" tiene polisemia, es decir, variada significación, pero cuando los matemáticos hablan de "teoría de modelos" se refieren a la noción de "modelo" que acabamos de definir. El modelo sería algo así como una "interpretación acertada" del sistema axiomático. Recordemos que en el sistema axiomático formal las deducciones fueron hechas formalmente pero empleando formas *correctas* de razonamiento, lo cual significa que ahora, en una interpretación, si estamos ante un modelo, o sea, si los axiomas se han transformado en verdades, *todos los teoremas tendrán que ser verdaderos también.*

Como consecuencia, se produce una situación muy importante desde el punto de vista metodológico. Supongamos por caso que un investigador en física, química o biología, al cabo de una

investigación, descubre que, al interpretar un sistema axiomático en relación con objetos propios de su disciplina, los axiomas se transforman en verdades. Entonces todos los abundantísimos teoremas que el matemático pudo ya antes haber demostrado se transforman de pronto, ahora, en verdades acerca de lo que el físico, químico o biólogo está investigando.

De acuerdo con esto, la matemática sería un procedimiento "por anticipado" para proporcionar verdades a todos aquellos que descubren, en el transcurso de una investigación, que se hallan ante un modelo de un sistema axiomático. En ese caso, el matiz de "juego" que presentaba la matemática se convierte ahora en una cosa muy distinta: en un instrumento gracias al cual el científico de pronto puede encontrarse con abundantísimos lotes de verdades en su propio campo de investigación. (Verdades que, quizás, él mismo no hubiera podido obtener directamente.) Esto significa que el interés de los sistemas axiomáticos no radica solamente en sus aspectos lúdricos o "puros", sino también en ámbitos "prácticos" que atañen a la matemática aplicada.

Con respecto a la geometría no euclideana, el detonante de todo este descubrimiento metodológico que acabamos de describir, digamos que, en aquel momento, se hubiera pensado que la geometría no euclideana era un sistema axiomático *formal,* y no más que eso. También lo sería la geometría tradicional, euclideana, una vez eliminados los significados usuales de sus términos (tales como "punto" o "recta"); pero la opinión existente por entonces era que había un significado especial que hacía de esta geometría una *ciencia del espacio físico* en el sentido aristotélico de la palabra, es decir, con axiomas no sólo verdaderos sino también necesarios, debido a su simplicidad y evidencia. Desde el punto de vista de la matemática aplicada, la geometría euclideana sería una verdadera ciencia, lo cual no cabría afirmar de la no euclideana. Sin embargo, los matemáticos descubrieron posteriormente, allá por la segunda mitad del siglo XIX, modelos de la geometría no euclideana dentro de la propia matemática. Para colmo, descubrieron también estructuras geométricas euclideanas que, con una determinada interpretación, podían verse como ejemplos de geometrías no euclideanas. Lo más curioso, sin embargo, aconteció en el campo de la física. Con la aparición de la teoría de la relatividad y de la cosmología moderna, los físicos se han convencido paulatinamente de que la geometría del mundo real no lleva a

un modelo de la geometría euclideana, sino a uno de la geometría no euclideana. En este momento resulta que, más bien, el carácter de "juego" se le podría aplicar a la geometría tradicional, pues el modelo que la hacía útil para las ciencias fácticas se pierde, y que, por el contrario, la ciencia del espacio físico en el que estamos inmersos es no euclideana.

Dicho incidentalmente, esto muestra algo que podríamos vincular con la ética científica: nunca debe "prohibirse" una actividad matemática porque no tenga modelos y sea, hasta el momento, un mero juego. No debe hacerse porque nadie sabe si en el futuro no se encontrará una importante estructura física que obligue a utilizar lo que hasta el momento fue solamente un juego, es decir, algo que, convenientemente interpretado, se transforme en una ciencia en el más tradicional sentido de la palabra. En todo caso, mientras no haya evidencias de que esto puede ocurrir con un sistema axiomático, se comprende que en la repartición del presupuesto por los organismos de financiación la matemática no saldrá favorecida, pero esto es bien distinto de desdeñarla recurriendo a prejuicios ideológicos.

Cabe además formular otro comentario. Cuando el diccionario que permite la interpretación de un sistema axiomático ofrece denotaciones de carácter fáctico o empírico, tenemos el problema de si los principios se transforman en verdades o si eso está fuera de nuestro poder de decisión. En el mejor de los casos estaremos en presencia de lo que se puede llamar un *modelo hipotético,* en el que los axiomas formales del sistema axiomático se transforman en hipótesis aceptadas de un sistema hipotético deductivo conspicuo, o bien en un conjunto de hipótesis a ser investigadas por alguna razón teórica o práctica. Por esto nunca será posible, en las aplicaciones de la matemática, decir concluyentemente que estamos ante un modelo sino, a lo sumo, afirmar que es una buena hipótesis pensar que lo estamos. Ésta es la verdadera situación que se presenta en la actividad científica, incluso en el caso de nuestra aseveración anterior según la cual los físicos piensan que el verdadero modelo físico del espacio corresponde a la geometría no euclideana y no a la euclideana. Tal afirmación sería un tanto excesiva. Lo que sí se puede decir es que la física contemporánea y la cosmología ofrecen modelos hipotéticos que tienen mucho apoyo de la geometría no euclideana; pero, aun así, decidir lo que ocurre en la realidad pertenece al ámbito de la corroboración, el apoyo y

la aceptación de las teorías científicas según los cánones del método hipotético deductivo.

De acuerdo con la descripción anterior, un sistema axiomático es una estructura constituida por símbolos y relaciones entre símbolos. Pese a que, en homenaje a la tradición, seguimos hablando de "vocabulario primitivo", de "afirmaciones" y aun de "teoría" (a lo cual agréguese que se mencionan "axiomas" y "teoremas"), conviene no perder de vista que, mientras no surja el problema de la interpretación, un sistema axiomático es puramente sintáctico en el sentido en que los lógicos usan esta palabra: un conjunto de signos sometidos a ciertas reglas de uso y de estructuración. Entendida de esta manera, la geometría euclideana no es más que un discurso *ciego,* pudiera decirse, dado que no ofrece ninguna información acerca del mundo exterior. Ofrece, solamente, lo que en términos más modernos podrían llamarse *algoritmos,* pero en un sentido lingüístico de esta palabra, que sólo implica manipular signos y obtener nuevas combinaciones de signos con las reglas del sistema. Por consiguiente, esta versión de la matemática que hemos denominado "matemática pura" (aunque hay quienes tienen otra concepción de cómo entender la palabra "puro" en relación a lo matemático) es, en verdad, un discurso que sólo potencialmente, y cuando se le dé interpretación a sus símbolos, puede transformarse en algo más que un mero formalismo sintáctico y simbólico. Pero entonces no estaremos en el ámbito de la matemática pura, sino en el de la matemática aplicada.

La observación anterior es pertinente porque, de acuerdo con lo que hemos señalado a propósito de los modelos hipotéticos y de las interpretaciones de los sistemas sintácticos en ciencia, conviene hacer ciertas distinciones. Podemos hablar de *modelo* como "interpretación" en el sentido puramente lingüístico de la palabra; en este caso, sólo establecemos un diccionario que permite traducir cada término del sistema dado en un término o combinación de términos de otro sistema. Se trataría de un *modelo relativo,* por cuanto no se proporciona realmente significación en un sentido absoluto, sino que se traduce la manera de hablar en un sistema por la manera de hablar en otro sistema; pero, como los dos sistemas son puramente sintácticos, el resultado es algo así como pasar una caligrafía a otra.

Esto es útil por varias razones. Puede haber sistemas que, en un sentido que no corresponde explicar en este momento, son

"confiables" (es decir, que no conducen a incongruencias o incoherencias) y entonces, probar que un nuevo sistema puede traducirse al discurso del viejo sistema implicaría, por razones lógicas, que el nuevo sistema también es "confiable". De paso sea dicho, si al proponer el diccionario traducimos todos los enunciados del primer sistema a enunciados del segundo sistema, puede ocurrir que los teoremas del primer sistema se transformen en teoremas del segundo sistema, y más específicamente que los axiomas del primer sistema se transformen en teoremas del segundo sistema. Se puede, entonces, hablar de *modelos relativos*. El lector recordará que definimos "modelo" en un sentido *absoluto* cuando, al hacer la interpretación, los axiomas del sistema, como resultado de la misma, se transforman en verdades. Pero no es eso lo que ocurre en este caso: aquí no podemos hablar de "verdades". Si al hacer la traducción de un sistema a otro se descubre que los axiomas del primer sistema se transforman en teoremas del segundo sistema, lo que se deduce de dichos axiomas son teoremas del segundo sistema, y lo que se deduce de los teoremas del primer sistema son también teoremas del segundo sistema. En una palabra, si los axiomas de un sistema se transforman en teoremas del otro, todos los teoremas del primero se convierten en teoremas del segundo. Esto es muy importante por razones totalmente análogas a las que ya hemos mencionado, es decir, la utilidad que tiene para la matemática aplicada interpretar los sistemas axiomáticos. Si descubrimos que el discurso de un sistema, en su punto de partida, transformado mediante el diccionario que efectúa la traducción, se convierte en teoremas de otro sistema, automáticamente (y a modo de "regalo") todo aquello que se demostró como teorema en el primer sistema resultaría ser válido como teorema en el segundo sistema.

Este tipo de interpretaciones relativas, que traducen un sistema en otro y que hacen que los axiomas y, en general, los teoremas de un sistema, pasen a ser teoremas en el otro sistema, permite una suerte de matemática aplicada dentro de la propia disciplina. Tales modelos relativos son moneda muy corriente en la estrategia de los matemáticos y constituyen lo que podríamos llamar un primer tipo de matemática aplicada, *interna* a la matemática misma. Pero esto no es todo. Como analizaremos de inmediato, en razón de ciertas discusiones recientes (en el fondo, recaídas de viejas discusiones acerca de la existencia o no de proposiciones u

objetos matemáticos) podría suceder que existiesen entidades a la manera platónica como, por ejemplo, las que se admiten en la llamada *teoría de conjuntos.* La idea que subyace aquí es que, entre las entidades que podemos encontrar, las hay de características diversas, totalmente peculiares. Podrían ser, por caso, *lógicas,* y esto es lo que sostendrá, como veremos más adelante, la posición llamada *logicismo,* o bien podrían ser otra clase de objetos especiales. En tal caso, sería posible encontrar interpretaciones y, en particular, modelos (en el sentido absoluto que ya hemos descrito) en los cuales el diccionario traduciría el lenguaje sin significación de la matemática a un lenguaje significativo donde se habla, significativamente, acerca de conjuntos o de cualquier otra clase de objetos matemáticos. Aquí, como ya lo hicimos notar, las cuasiproposiciones, una vez interpretadas, se transforman en verdades o en falsedades, pero, ¿de qué ámbito de conocimiento? De la propia matemática.

Si esta posición pudiese ser sostenida (cosa no fácil después de los argumentos que, en principio, se pueden esgrimir contra el punto de vista platónico), podríamos hablar, en relación con tales modelos absolutos de la matemática, de *modelos matemáticos,* no en el sentido anterior de conexión relativa entre dos sistemas sintácticos, sino de una traducción de la matemática sintáctica *en términos de un discurso significativo que se ocupa de los objetos matemáticos.* Tendríamos entonces, además de los modelos relativos, estos modelos matemáticos o, para ser más precisos, *modelos lógico-matemáticos,* puesto que podríamos estar en presencia de una traducción del lenguaje matemático al de la lógica, en particular al de la parte de la lógica en que se habla de *clases, clasificaciones* y otras entidades que parecen pertenecer más al dominio de esta disciplina que al de otras.

Finalmente, si al hacer una traducción no producimos ni un modelo relativo ni un modelo matemático, tal como los hemos definido en párrafos anteriores, entonces habremos obtenido un *modelo hipotético deductivo.* Parecería entonces que hay, al menos, *cuatro* maneras diferentes de hacer matemática. La primera, que podría denominarse, por decirlo así, "formalísima" o "purísima", consistiría en tomar sistemas sintácticos y desarrollarlos deductivamente para obtener teoremas en tales sistemas. La segunda utilizaría sistemas sintácticos para aplicarlos a modelos relativos, es decir, a otros sistemas sintácticos; el campo sería aquí el de la

"matemática pura", aunque no "purísima" porque los primeros sistemas se "contaminan" por culpa de los segundos. La tercera manera, si se nos permite seguir hablando de modo metafórico, nos conduce a lo que podríamos llamar "matemática bastante pura", porque ahora se emplean modelos matemáticos (o lógico-matemáticos) y se habla de objetos determinados acerca de los cuales se ofrecen conocimientos. Sin embargo, se comprende que, en el ámbito de la lógica, por ejemplo, las razones por las que se habla de "conocimiento" o "verdad" no son de la misma índole de las que se invocan en el caso de las ciencias fácticas y, en particular, de las que se vinculan con el método hipotético deductivo. Por eso, el cuarto modo de hacer matemática, que nos conduce a la auténtica "matemática aplicada" (y en un sentido tradicional de esta denominación), radicaría en la consideración de los modelos hipotético deductivos, aquellos en los que, al hacer una interpretación o formular un diccionario, los axiomas del formalismo se transforman en hipótesis de una teoría fáctica aceptada y utilizada por la comunidad científica. Tendríamos entonces una "matemática modelística hipotético deductiva". Todo esto muestra que lo que se suele llamar "matemática" (a secas) es, en realidad, una actividad bastante compleja y diversificada, en la cual hay que distinguir estratos según el propósito y el alcance de la investigación que se lleva a cabo.



Nuevas respuestas a cinco preguntas

Admitamos entonces, a partir de las consideraciones anteriores, que existen cuatro formas de concebir y practicar la matemática. En este punto, sería oportuno volver a formular nuestras cinco preguntas y señalar cómo se las respondería en cada caso. En el ámbito de la "matemática purísima", a la pregunta sobre cuáles son los objetos de los que se ocupa la matemática, la respuesta sería que ella no se ocupa de ***ningún objeto*** por la simple razón de que estamos en presencia de una actividad puramente algorítmica y sintáctica, en la cual los signos no tienen una significación determinada. (Tal circunstancia, dicho sea de paso, no constituye ninguna "falta", porque deja abierta la utilización de la matemática en ámbitos muy distintos.) A la pregunta acerca de por qué los científicos aceptan las afirmaciones de la matemática, comenzaríamos por responder que no se trata de que las acepten como verdaderas. Convienen en que el juego algorítmico en el que en suma consiste el sistema partirá de los axiomas, a los cuales habrá que sumar los que se obtengan como teoremas mediante deducciones lógicas, lo que se realiza aplicando las reglas de juego para cada sistema particular. Si no les satisface el sistema, tendrán el derecho de no "jugarlo" y emplear otro de estructura, lenguaje o características totalmente distintas. Por consiguiente, la respuesta a la segunda pregunta implica que la fuente de los principios de la matemática es una convención que nos da la gana adoptar en cada caso. A la tercera y cuarta preguntas, sobre cómo se amplía el conocimiento matemático y cómo se enseña la matemática, la respuesta sería: por medio de un método de carácter algorítmico que consiste en, una vez planteado el punto de partida y en posesión del instrumento lógico (deductivo) que nos permite obtener proposiciones a partir de otras ya conocidas, extender la matemática tratando de construir nuevas demostraciones. En el caso de la enseñanza, además, sería necesario previamente ejercitarse en el método deductivo necesario para construir los sistemas, pero también tratar de desarrollar una facultad de carácter artístico que nos permita imaginar y producir nuevos sistemas axiomáti-

cos. Esto último, a veces, no tiene más interés que satisfacer la curiosidad de hacerlo, pero en otras oportunidades puede implicar un acierto importante para el porvenir de la matemática: inventar un sistema axiomático, como aventura intelectual y estética, en el fondo, no es tan diferente a componer una fuga contrapuntística o elaborar una interesante combinación de colores y superficies. El crítico de arte argentino Aldo Pellegrini, fallecido hace cierto tiempo, se refería a las pinturas de Piet Mondrian como maravillas estéticas. Si lo son, conviene advertir que en ellas no hay nada parecido a interpretación, designación o referencia, de donde resulta que no es del todo disparatado decir que la creación de un sistema axiomático tiene realmente su analogía a la creación de alguna de las obras de Mondrian y de otros representantes de la "pintura abstracta".

La quinta pregunta, recordemos, se refería a la relación entre la matemática y lo real. Acerca de ella, debemos dirigirnos a lo que hemos denominado "matemática bastante pura" y "matemática modelística hipotético deductiva". La matemática entendida como un sistema sintáctico no se refiere a realidad alguna, pero a través de interpretaciones se transforma en un sistema o discurso con sentido que puede concernir a entidades matemáticas o bien (y esto es generalmente lo más útil) aludir a aspectos de lo real. Desde luego, no hay por qué creer que cada vez que se desarrolla un sistema axiomático deba justificárselo en nombre de sus aplicaciones. Probablemente, la gran mayoría de los discursos que se pueden inventar en matemática como descripciones de estructuras posibles no tendrán jamás aplicación a lo real; pero también es cierto que una cantidad importante de algoritmos matemáticos sí lo tendrán, y serán entonces instrumentos indispensables para el estudio de la realidad concreta. En este sentido, el estudio de la matemática, aunque sea algorítmica, lo es también el de potenciales instrumentos para obtener conocimiento de lo real. En cuanto al segundo tipo de matemática ("pura"), que consiste en interpretar en forma relativa un sistema axiomático sobre otro, o sea, un discurso sintáctico sobre otro discurso, podríamos repetir gran parte de lo que hemos dicho acerca de la "matemática purísima". A la pregunta de cuáles son los objetos de los que nos estamos ocupando, nuevamente la respuesta sería: de ninguno en particular, porque mientras estemos ante discursos de estructura puramente sintáctica no hay significación ni desig-

nación. Observemos, sin embargo, que cuando desarrollamos un sistema sintáctico procedemos de un modo similar al de quien escribe un relato de ciencia ficción, pues imaginamos cómo podrían ser los objetos que satisficieran las condiciones que establece el sistema. Diríamos que, asociados a cada sistema axiomático, podríamos concebir *objetos imaginarios,* y éstos serían aquellos de los se ocupa el sistema. En una interpretación relativa, se podría decir que nos estamos ocupando de un sistema de objetos imaginarios que corresponden a otro sistema, pero esto no es más que una manera de hablar. A la pregunta sobre la validez de los enunciados matemáticos, aquí, en este caso, lo único que interesa es que los enunciados resulten ser teoremas en el segundo sistema. Respecto de cómo se extiende la matemática, habría que agregar a lo dicho anteriormente que debemos ocuparnos de analizar qué traducciones de ciertas partes de la matemática a otra son posibles, y también de encontrar sistemas que pudieran permitir una traducción matemáticamente útil de temas ya investigados por la propia matemática. Desde el punto de vista pedagógico, habría que enseñar a los alumnos a lograr, a través de un sistema, la posibilidad de conocer propiedades y características de otro sistema. En cuanto a la relación con lo real, ella sería indirecta. Un sistema podría ser de interés para lo real si tiene interpretación relativa sobre otro sistema del que ya se sabe que es útil para la matemática aplicada, sobre todo por poseer modelos hipotético deductivos.

Respecto de la tercera manera de realizar la actividad matemática, o sea, cuando se está ante un diccionario que interpreta el lenguaje matemático sobre determinados objetos y, en particular, sobre los objetos lógicos (no objetos de los que tratan las ciencias fácticas, sino objetos de una característica especial, acerca de cuyo conocimiento ya el método hipotético deductivo, en principio, no nos ayudaría), a la pregunta acerca de los objetos de los que se ocupa la matemática responderíamos mostrando, precisamente, tales objetos. Habría que señalar, como ocurriría en la mayoría de los casos, que se trata, por ejemplo, de conjuntos, o bien de clases, o bien de funciones, etcétera, dependiendo ello de la manera de fundamentar esta suerte de neoplatonismo en que consiste la tercera posición. A la pregunta de por qué aceptamos como verdaderas o falsas las proposiciones de un sistema cuando así se lo interpreta, la respuesta es que sería por razones lógicas o, por lo menos, por las razones de carácter intuitivo que nos permiten aprehender

verdades acerca de los objetos matemáticos. Aclaremos el punto. Si admitimos que estamos hablando de conjuntos o de números, por ejemplo, es claro que a propósito de ellos a veces decimos verdades y otras veces falsedades; pero cuando sabemos que decimos verdades o, al menos, cuando lo admitimos, las razones parecen no estar vinculadas a la observación y a pruebas de carácter hipotético como las que caracterizan al método hipotético deductivo. Existen las llamadas "verdades lógicas", por ejemplo, las cuales, para su fundamentación, exigen fuentes que son todavía motivo de discusión entre los especialistas, pero que tienen una característica *sui generis*.

Si se admite lo anterior, se tendría que decir que, en esta posición, las razones por las que se aceptan enunciados matemáticos y, en particular, por las que advertimos que estamos ante un modelo absoluto sobre objetos matemáticos serían, en el fondo, razones lógicas, pero de tipo ontológico, es decir, que tienen que ver con el tipo de objetos de los cuales se ocupa la lógica. A la pregunta de cómo se extiende el conocimiento y de cómo se lo enseña, la respuesta sería curiosamente similar a la que ya mencionáramos cuando nos ocupamos de los pensamientos de Pitágoras y de Platón. Por un lado, desarrollar los conocimientos y aptitudes que tenemos para manejarnos con la lógica y, por otra parte, desarrollar aquellas fuentes tal vez localizadas en nuestra intuición racional y que nos permiten aprehender las verdades generales sobre el tipo de objetos que nos ocupa. A la pregunta de qué tiene que ver todo esto con la realidad (quinta pregunta), la respuesta sería que no tiene nada que ver con ella pues lo mismo sucede con la lógica. En efecto, ésta nos ofrece conocimiento formal sobre procesos de deducción, en este caso, de deducción matemática, la cual quedaría ligada a la deducción lógica y también a nuestro conocimiento de los objetos matemáticos. Debemos tener en cuenta, sin embargo, que hasta ahora no hemos demostrado la existencia de tales objetos y que, de no existir éstos, la reducción a la lógica que propone la posición logicista tendría, tal vez, que formularse de otra manera.

Finalmente, debemos referir nuestras cinco preguntas al caso en que tratamos con sistemas hipotético deductivos y, en particular, con modelos hipotéticos. Ahora, lisa y llanamente, estaríamos hablando de objetos que corresponden a las ciencias fácticas. Pero no se trata de objetos especiales, pues cualquier objeto, de cual-

quier categoría o naturaleza, puede aparecer en un diccionario y en una interpretación. En cierto sentido, la matemática aplicada permite que la matemática pueda ser útil para el estudio de cualquier tipo de entidad o de objeto y, en particular, de los objetos "prácticos". En completo contraste con lo que sucedía en el ámbito de la "matemática purísima", donde no se hablaba de *ningún* objeto, ahora sí hablamos de ellos, cualesquiera, pues a través de diccionarios es perfectamente posible hablar de trozos de género, cantidad de zanahorias, soldados o consumidores de un determinado producto. (Lo cual no significa que, necesariamente, el modelo que resulta sea interesante.) Se ha dicho más de una vez que la matemática es "la reina de las ciencias", pero luego se corrigió esta caracterización afirmando que es, a la vez, "la reina y la sirvienta de las ciencias". De hecho, es así si hablamos de la matemática aplicada, pues no hay objeto que, en principio, no sea susceptible de tratamiento matemático.

En este punto debemos evitar cometer el error de muchos epistemólogos cuando afirman que sólo se está ante una seria y auténtica investigación científica cuando se *cuantifica* el problema, es decir, cuando se emplean los números y sus relaciones para comprender la realidad. Sostener que toda entidad es susceptible de tratamiento matemático es bien distinto a afirmar que lo sea de tratamiento *numérico.* No estamos formulando esta última tesis. Bien es verdad que los sistemas axiomáticos de la matemática son, en algunos casos, numéricos. Tal cosa no puede ser negada, pues entre los sistemas más importantes se encuentran aquellos en los que hay expresiones numéricas de alguna naturaleza. Pero no debemos olvidar que en el ámbito de la matemática hay, por caso, "álgebras abstractas", donde los sistemas parecen describir entidades posibles, entre las cuales hay algoritmos y operaciones, pero que no son de naturaleza numérica. Un ejemplo es la famosa *teoría de los grupos,* en la que se presenta la llamada "operación de producto en un grupo" que, en algunas traducciones, puede entenderse así: estamos hablando de desplazamientos geométricos, y un producto de dos desplazamientos es, simplemente, el desplazamiento que se obtiene efectuando el primero en primer término y luego el segundo. Pero los desplazamientos en sí mismos no tienen por qué ser entidades numéricas.

En síntesis, las respuestas a nuestras cinco preguntas difieren según el propósito o situación en que nos involucra la investiga-

ción y el empleo de los sistemas axiomáticos. Además, sin duda, la matemática viva, la matemática de los científicos cuando investigan, suele ser una especie de edificio que contiene piezas que corresponden a cada uno de los cuatro tipos de matemática que hemos presentado. Es muy posible que una investigación en física tenga aspectos matemáticos "purísimos", otros de carácter "puro", otros de carácter "bastante puro" y algunos modelísticos de carácter hipotético deductivo. La matemática, tal como se la desarrolla o se la piensa en la labor cotidiana, es evidentemente una yuxtaposición de todas estas actividades; pero desde el punto de vista epistemológico, para tratar de comprender cuestiones de validez y de estructura de la actividad científica, parece que estas cuatro formas de concebir y practicar la matemática tienen que estar claramente diferenciadas.

VI

Logicismo, intuicionismo y formalismo

A fines del siglo pasado, como resultado de la labor de algunos lógicos y filósofos como Gottlob Frege y Bertrand Russell, se difundió lo que hemos llamado "posición logicista", en una primera formulación de ésta que consiste en afirmar que hay un modelo matemático absoluto. Frege y Russell creían posible construir un diccionario en el que todos los términos de la matemática se pudieran traducir a términos lógicos, de modo que las proposiciones matemáticas admitirían una traducción a proposiciones lógicas. De ser esto cierto, podríamos tomar un sistema axiomático de los más conspicuos en esta disciplina, como el de la geometría euclideana o el de la aritmética (por ejemplo, como Giuseppe Peano lo formuló a fines del siglo XIX), y hacer una traducción donde todo lo que se afirma sobre "rectas" o "planos" pudiera traducirse a ecuaciones y éstas traducirse ahora a estructuras numéricas, las cuales, a su vez, se traducirían a términos conjuntísticos o de clase: habríamos arribado, entonces, al terreno de la lógica. Bertrand Russell mostraba, por ejemplo en su libro *Introducción a la filosofía matemática,* que si eso se hace, se obtiene realmente un modelo porque los axiomas de la aritmética (e indirectamente los de la geometría) podrían transformarse en verdades lógicas. El intento fue realizado sistemáticamente y aparece tanto en la obra de Frege como en el famoso *Principia Mathematica* de Russell y Alfred Whitehead (1908). Pretendía mostrar, sin caer en un platonismo exagerado, que, cuando hablamos en lenguaje matemático, podríamos estar realmente formulando afirmaciones lógicas acerca de clasificaciones, propiedades de las clasificaciones, conjuntos de clasificaciones, etcétera.

Lo interesante de este punto de vista era que daba una versión de la matemática diferente a la que ofrece el método axiomático. Aquí, sin que discutamos en este momento cómo harían los lógicos para justificar su elección de principios lógicos o de puntos de partida para las investigaciones lógicas, quedaría claro que una manera de pensar y hablar con sentido en matemática sería entendiendo que lo que decimos son enunciados de la lógica. La mate-

mática sería un capítulo de la lógica, y ante la pregunta acerca de cuáles son los objetos de los que se ocupa la matemática la respuesta sería: de los objetos lógicos. (O por lo menos, en una versión atenuada de esta posición logicista, diríamos que todos los enunciados donde figuren términos matemáticos son lógicamente equivalentes a enunciados en los que sólo aparecen términos que corresponden a la lógica.) Como la labor de Frege y Russell fue mostrar que los axiomas de los sistemas matemáticos se transforman en verdades lógicas, lo mismo ocurriría con todos los teoremas matemáticos. En el fondo, hacer matemática sería hacer lógica, y hacer deducciones matemáticas sería hacer deducciones internas dentro de la lógica. Esta situación, en cierto modo, garantizaría la coherencia de los discursos matemáticos en los que es posible semejante interpretación y, por tanto, los mismos no atravesarían situaciones molestas tales como contradicciones internas o inconsistencias. Si con esta traducción todo teorema matemático se transforma en verdad lógica, no puede haber incompatibilidades u oposiciones entre los enunciados de la matemática porque éstos se transformarían en verdades lógicas que no se oponen entre sí, y tenemos la seguridad de que los enunciados de la lógica no pueden entrar en contradicciones. Ésta sería la manera en que el modelo de Frege y de Russell garantizaría las cualidades positivas del discurso matemático.

Pero ya a fines del siglo XIX y luego a comienzos del XX, se descubrió algo muy grave para las pretensiones de la escuela logicista, y es que la lógica a la cual la matemática podía traducirse, de acuerdo con este criterio, llevaba a contradicciones. Éste es el famoso episodio denominado *aparición de las antinomias lógicas.* (En algunos textos se habla de "paradojas lógicas", pero nosotros preferimos reservar la palabra *paradoja* no para contradicciones sino para aquello que violenta nuestra intuición; *antinomia* significa, lisa y llanamente, que estamos ante una contradicción.) El descubrimiento fue realizado en 1897 por el matemático italiano Cesare Burali-Forti y luego, especialmente, por Bertrand Russell en 1903. El de este último parece ser la reelaboración, en realidad, de una antinomia anterior descubierta por George Cantor, el inventor de la teoría de los conjuntos, quien, según se cree, la mantuvo en secreto.

En este punto conviene hacer una aclaración. Para Frege o para Russell, la lógica como disciplina no designaba lo mismo que

para Aristóteles. La palabra "lógica" es de aparición relativamente reciente, y según algunos historiadores habría sido empleada por primera vez en el siglo XVIII o en el XIX. Pero la lógica de Aristóteles, que él llamaba *dialéctica,* cuando se la analiza con criterios contemporáneos, resulta insuficiente. Hoy se sabe que las reglas deductivas establecidas por Aristóteles no son todas las que efectivamente existen, por lo cual el alcance del instrumento deductivo aristotélico es un tanto pobre. Además, Aristóteles, como casi toda la tradición filosófica, creyó que los enunciados simples eran de la forma sujeto-predicado, hasta que se advirtió que hay enunciados *relacionales* donde no hay un sujeto sino dos o más, sobre los cuales no se afirma un predicado sino la existencia de un vínculo o de una relación. (Por ejemplo, "Juan es más alto que Pedro".) Esta idea resultó fundamental para nuestro siglo, el cual, tanto filosófica como científicamente, es, por cierto, bastante estructuralista, o sea que tiende a estudiar la realidad como un museo de peculiares estructuras donde lo que hay que establecer es el modo de relación o de vínculo entre sus componentes. Por último, digamos que Aristóteles confunde lo que actualmente se llama el "problema de la cuantificación" con el "problema de la predicación y de la cópula". Cree que palabras como "todos", "algún" y "ningún" son formas en que puede enunciarse la palabra "es" cuando afirmamos un predicado de un sujeto. Hoy en día, la lógica de "todos", "algún" y "ningún" constituye una lógica especial bastante complicada a su propio derecho, y el problema de la predicación, de las propiedades, de las relaciones o de las funciones es concebido como otro totalmente diferente.

El intento de Frege y de Russell fue el de ofrecer una lógica nueva que comprendiera y corrigiera la de Aristóteles en algunos errores de detalle que tenía esta última, pero completándola con la lógica de la cuantificación, de las relaciones, etc. En particular (aunque hoy se sabe que no es totalmente indispensable tenerla en cuenta), una noción lógica que no había considerado explícitamente Aristóteles es la de conjunto. No se puede negar que él pensó que una propiedad tiene *intensión* y *extensión.* La intensión es el conjunto de notas que la caracterizan esencialmente, en tanto que la extensión es el área del universo o zona donde se hallan los ejemplos a los cuales se puede aplicar la propiedad. La extensión es lo que en la actualidad se llama una "clase", y esto es lo que permite dividir el mundo mediante una clasificación, separando los

objetos a los cuales se puede aplicar la propiedad de aquellos a los que no se la puede aplicar. En un sentido geométrico, una clase es una zona del universo, pero de aquí no se desprende que Aristóteles pensara que una clase es, además, un tipo particular de objeto, el cual, a su vez, se puede clasificar, y con el cual se pueden formar nuevas clases o clasificaciones. Cuando se piensa en las clases de esta última manera, es decir, concibiéndolas como objetos, se las llama "conjuntos". La teoría de los conjuntos fue creada por Cantor a fines del siglo XIX.

Cuando Cantor ya estaba consiguiendo convencer a los matemáticos de la legitimidad de una matemática basada en su teoría de los conjuntos (una especie de aritmética o geometría que no se ocupa de números o de figuras sino de conjuntos), se descubrió que el empleo de conjuntos junto con algunas de las ideas más básicas de la lógica, como el principio de tercero excluido y otros semejantes, llevaba a contradicción. Ante la contradicción, era posible proceder de distintas maneras. Frege, convencido de que su nuevo modo de formular la lógica de manera completa era el adecuado, pensó que la aparición de estas contradicciones significaba alguna suerte de colapso de la aritmética. En realidad, lo que demostraba esta situación no es que la matemática lleva a contradicción, sino la incapacidad de la lógica que utilizaba Frege para poder construir el modelo lógico absoluto al cual nos hemos referido anteriormente. De todas formas, la aparición de las antinomias provocó gran alboroto y muchas discusiones. Es interesante señalar que tal situación produjo en la epistemología de la matemática una especie de gran división acerca de cómo se debe entender la disciplina. Los llamados *neointuicionistas,* por un lado, o el lógico Alfred Tarski, por otro, pensaban que había que modificar la lógica y construir otra de estructura diferente a la clásica de Aristóteles corregida por Frege y Russell. (Se podría, por ejemplo, no admitir ciertos principios lógicos empleados en la construcción de las antinomias.) Ésta era, en rigor, una actitud extrema. Bertrand Russell adoptó otra posible estrategia que, en cierto modo, también supone la corrección de la lógica, pero un sentido distinto del anterior. Impuso condiciones más estrictas para indicar qué enunciados tienen realmente sentido y cuáles, a pesar de tener una forma gramatical aparentemente correcta, no lo tienen; estos últimos no serían, de hecho, enunciados, y habría por tanto que eliminarlos.

Para comprender lo anterior, consideremos un ejemplo que ofrece el propio Russell: "compatibilidad bebe dilación". Es evidente que, desde el punto de vista gramatical, no hay nada que objetar, pues la frase tiene sujeto, verbo y predicado; pero desde el punto de vista categorial, parece haber aquí un disparate. "Beber" es un verbo cuyo sentido es vincular la acción de un sujeto vivo con un líquido, y "compatibilidad" no parece, realmente, por su categoría gramatical o lógica, estar refiriéndose a un animal. Por consiguiente, ya desde el principio, esto es un absurdo, completado por el hecho de que "dilación" no es ningún líquido que pueda beberse. Bertrand Russell niega que esta frase tenga sentido informativo, porque hay incompatibilidad categorial entre las palabras que están presentes y, entonces, no tiene significado. Aunque este ejemplo puede parecer algo tosco, permite advertir la dificultad de una sola vez. Pero, ¿qué diríamos ante una frase como "el número 8 es valiente"? También aquí estamos ante un caso gramaticalmente inobjetable: del *sujeto* (el número 8) decimos que *es* (cópula) *valiente* (propiedad). Pero ocurre que "valiente", por su categoría lógica de significación, es una propiedad de objetos concretos, más aún, de objetos vivos y, además, sólo en cierto tipo de ocasiones. Es evidente que esta frase, igual que "compatibilidad bebe dilación", tiene un defecto de construcción de carácter lógico: el tipo de cosas que constituye la aplicación del discurso para el cual están destinadas las palabras es muy distinto para cada una de las palabras involucradas y, por consiguiente, aunque la frase esté gramaticalmente bien construida, no lo está desde el punto de vista lógico. Un nuevo ejemplo, algo más sutil, sería la afirmación "César es un número primo". Aquí estaríamos tentados de decir que es falsa porque César no es un número, y por tanto no puede ser un número primo. Pero también podemos pensar que "número primo" es una propiedad diseñada para ser aplicada en materia de números, y que la afirmación, sencillamente, carece de sentido. Según Bertrand Russell, que en este punto no tiene demasiada simpatía con las filosofías tradicionales, los filósofos caen a menudo en el error de creer que una estructura gramatical correcta garantiza un significado adecuado, sin tener en cuenta la posibilidad de que se les presenten dificultades como las que hemos señalado.

Cuando el existencialismo estaba de moda, solía formularse la siguiente pregunta: "¿La existencia precede a la esencia o la esen-

cia precede a la existencia?". Un filósofo puede tener la tentación de contestar por *sí* o por *no* esta pregunta, pero previamente sería necesario decidir si, más allá de su estructura gramatical, no hay en ella algún problema categorial. Realmente, preguntarse si la esencia precede o no a la existencia parece confundir el alcance de la palabra "preceder", que se aplica a sucesos temporales. Muy probablemente, el filósofo podría insistir, y estaríamos dispuestos a darle la razón, en que la frase tiene alguna clase de significado. Pero para ello sería necesario admitir que esa manera de hablar es una paráfrasis de algo más complicado, y que se habla de ese modo para expresar, sintéticamente, otra pregunta, como podría ser: "¿La programación genética, o sea, la esencia de una persona, determina su modo de ser, es decir, su existencia?". Si lo interpretamos así, como una paráfrasis, estamos hablando de una manera muy diferente, y nuestro problema radica en saber si la frase original expresaba o no una información clara que no era necesario reinterpretar. La idea de Russell, en lo que se denomina su ***teoría de los tipos,*** es que hay que dividir las palabras, los términos o las expresiones en tipos, o sea, en categorías que sólo pueden vincularse bajo ciertas condiciones estrictas; por ejemplo, si se quiere predicar o afirmar algo acerca de un individuo, es necesario utilizar, en el predicado, propiedades de individuos. Hay cosas que no son propiedades de individuos, sino propiedades de propiedades, y sería un error categorial tratar de predicar una propiedad de propiedades de un individuo. De cierto matiz podemos decir que es verde, en cuyo caso estamos predicando de un individuo, el matiz, una cierta propiedad, el verdor. De la propiedad, el verdor, podemos a su vez predicar el color, que parecería ser una propiedad de propiedades, y ello permitiría clasificar propiedades. Pero no sería lícito decir que determinado matiz sea un color, pues "color" es lo que permite diferenciar el ser verde (tener la propiedad "verde") de ser, por ejemplo, el sonido de un trombón.

De modo que, en la teoría de los tipos de Russell se construye una complicada estratificación de propiedades, relaciones y funciones, y se impone el requisito de que, al formar las frases, allí donde figuren sujetos de determinado tipo debe aparecer el tipo inmediato superior emparentado en el predicado o en la relación. De este modo, resultaría que una gran cantidad de enunciados dejarían de tener sentido aunque parezcan tenerlo. Russell muestra que muchas de sus antinomias se pueden evitar utilizando la teo-

ría de los tipos y considerando no significativas a una gran cantidad de afirmaciones, lo cual parece salvar a la lógica de ciertas contradicciones. Desgraciadamente en este salvataje queda suprimida también toda una serie de proposiciones que permiten construir nuestro modelo y edificar la matemática que estamos acostumbrados a emplear, de modo que el procedimiento se parece a aquél de arrojar bebés junto con el agua del baño. Consciente de ello, Russell introduce una serie de axiomas o postulados lógico-matemáticos extras, con lo cual la reducción se haría posible. Sin embargo, tal procedimiento tiene sus inconvenientes. La lógica de principios reducidos y naturales con la que Frege y Russell quisieron originariamente edificar el logicismo se sustituye ahora por una nueva entidad más compleja, a la que podríamos llamar "lógica de la teoría de los tipos", que ya no resulta ni tan intuitiva ni (sobre todo) evidente, y acerca de la cual no sabemos si finalmente lleva o no a contradicciones. En suma, no resulta claro si con ella es posible o no reformular la tesis logicista tal como la hemos desarrollado.

Junto a la posición logicista, deberíamos prestar mucha atención a otra orientación que, si bien por ahora no ha sido aceptada ni mucho menos por la generalidad de los matemáticos, ha causado bastante impresión entre los epistemólogos y los filósofos de la matemática. Nos referimos al llamado ***neointuicionismo en matemática*** (o, a veces, lisa y llanamente, ***neointuicionismo***), debido especialmente a los trabajos de Leopold Kronecker y Luitzen E. Brouwer, y también del famoso físico y matemático Henri Poincaré. En este caso no existe el propósito explícito de evitar las antinomias sino el de ofrecer una fundamentación de la matemática bastante distinta de la que hasta el momento hemos presentado. El neointuicionismo se vincula con la posición kantiana que presentáramos en el capítulo II, y la solución que ofrece, curiosamente, a propósito de los cuatro tipos de matemática que distinguimos anteriormente, llevaría a una posible variante de la tercera, a la cual se podría asociar un "modelo apriorístico neokantiano de la matemática pura".

Al igual que los logicistas, los neointuicionistas aceptan que toda la matemática puede ser construida a partir de los números enteros, pero sostienen que los números provienen del pensamiento humano: son entidades mentales. De acuerdo con esta posición, el "número 3" resulta de prestar atención a un primer objeto, que

podríamos denominar el "objeto cero", y aplicar luego nuestra aptitud de poder prestar atención a un objeto distinto de todos aquellos a los cuales ya se ha prestado atención, lo que permitiría atender a un objeto 1, luego a otro, el objeto 2, y después, si proseguimos realizando esta operación, al objeto 3, y así sucesivamente. De esta manera, el número resulta de una actividad mediante la cual se construyen y engendran distintos estadios de un orden, a partir de uno de ellos, que es el fundamento de cada uno de estos procesos. Un número siempre se refiere a una construcción, y lo mismo ocurre con una sucesión de números, pues ésta es, en el fondo, una sucesión de construcciones. Los neointuicionistas niegan, por tanto, que haya entidades platónicas acabadas y completas tales como conjuntos o sucesiones numéricas. Una sucesión es un proceso inacabable, siempre continuable, indefinido, que en cada momento ha llegado a un determinado estadio. Es relativamente fácil comprender que, con esta manera de entender la matemática, muchos de los procedimientos lógicos habituales ya no resultan tan obvios, y tal vez algunas leyes lógicas no podrían ser sostenidas.

Para aclarar el punto anterior, analicemos un ejemplo. Supongamos que se formula la siguiente pregunta: ¿existen en el desarrollo decimal del número π diez cifras 7 consecutivas? Un matemático clásico diría: "No lo sabemos, pero algún día, si tenemos suerte, alguien demostrará que sí o demostrará que no. Pero, independientemente de lo que ahora sabemos, la sucesión en cuestión tiene las diez cifras 7 consecutivas o no las tiene". Sin embargo, la respuesta de un neointuicionista sería algo distinta. Para él, afirmar que existen diez cifras 7 consecutivas implica la posibilidad de construirlas.

¿Qué significaría negar que existan esas cifras? No podríamos proceder a la manera platónica, tomando toda la sucesión y mostrando que en ninguna parte se encuentran las diez cifras en cuestión. No es posible, diría el neointuicionista, porque una sucesión es una construcción potencial que se realiza indefinidamente, pero que, en cada momento, se detiene en una de las etapas de su construcción. Ahora bien, lo que a lo sumo puede decirse, en un momento determinado, es: "Hasta ahora no las hemos encontrado". Pero de ello no se infiere que no existan, ya que podrían ser halladas en algún momento posterior. ¿Qué quiere decir, entonces, negar la existencia de las cifras? La única posibilidad sería

mostrar que de la proposición en cuestión ("existen las diez cifras, etcétera") se deduce una contradicción. (Por ejemplo, que de ella se deduce "3 = 2 + 2".) En una palabra, fundamentar esa negación implica, en cierto sentido, mostrar la legitimidad de una demostración por el absurdo. De acuerdo con lo dicho, un neointuicionista no aceptaría el principio de tercero excluido, según el cual, dada una proposición, ella tiene que ser verdadera o bien tiene que serlo su negación.

De allí que los neointuicionistas hablen de un "tercer estado", el de una proposición que no permite ser construida en su afirmación pero tampoco derivar de ella un absurdo mediante una deducción. Este ejemplo y otros llevan a los partidarios de la posición neointuicionista a reducir notablemente el alcance de la lógica, y, por consiguiente, las antinomias no se presentarían pero la matemática resultaría mucho más prudente y constructiva que la que se obtiene a partir de la teoría de conjuntos. Lo cual crea diversos problemas: se achicaría tanto el campo de la lógica que ya no se podría practicar la reducción de la matemática a la lógica. Si se procede de este modo, el modelo de Frege-Russell ya no se puede construir y ello deja a la matemática en la posición de puro formalismo con las estrategias que Bertrand Russell desarrolló con su teoría de los tipos. Por otra parte, matemáticos como Kurt Gödel demostraron que, en la formulación de la lógica neointuicionista, pese a su prudencia y al debilitamiento de algunos de sus principios, se produce una situación bastante parecida a la que existe entre la geometría euclideana y la no euclideana. Es posible hacer una interpretación relativa de la lógica de tipo clásico a la lógica de tipo neointuicionista y viceversa, y lo que importa (para lo que estamos discutiendo aquí) es que, si una de ellas presenta problemas, también los presenta la otra. En principio, lo único que parece perdurar y tener interés en el neointuicionismo es su tesis un tanto psicologista sobre la matemática antes que la posibilidad de que ofrezca un verdadero remedio a las dificultades que mencionamos anteriormente.

Al logicismo y al neointuicionismo debemos agregar una tercera posición que ya, en realidad, hemos desarrollado: el llamado *formalismo*. Según esta concepción, sostenida entre otros por el gran matemático David Hilbert, la matemática no sería más que la formulación y el desarrollo de sistemas formales. El problema que aparece aquí es que estos sistemas deben ser no contradicto-

rios, y según Russell, si no disponemos de traducciones y modelos, tales formalismos parecen ser meros juegos y no tenemos seguridad alguna de que puedan ser utilizados en el campo de las ciencias fácticas. En esta posición, que parece ser de algún modo la más gravitante en la matemática contemporánea, hay un acercamiento imprevisto hacia el método hipotético deductivo. Y ello es así por la siguiente razón: en virtud de célebres teoremas de lógica, como los teoremas de Gödel (1931) y otros, no disponemos de procedimientos mediante los cuales se pueda acceder con seguridad a un sistema matemático suficientemente rico y no contradictorio. Entonces, el uso de un sistema, ya sea por razones estéticas o prácticas, es siempre hipotético en el siguiente sentido: decidimos investigarlo y emplearlo en tanto no surjan contradicciones en su seno. Si éstas surgen, lo abandonaremos y ensayaremos con otra clase de sistema. Al utilizar un sistema no podemos saber de antemano si llegaremos o no a una contradicción, y la situación es similar a la de un sistema hipotético deductivo, en el que no se puede saber de antemano si quedará refutado o no, o bien si se deducirá o no de él alguna contradicción con la experiencia.

En el fondo, estas consideraciones muestran que el uso de un sistema matemático resulta de una posición hipotética que dependerá de la práctica matemática y de las aplicaciones que de él se hagan. Se emplearán determinados sistemas matemáticos porque son útiles y porque, hasta el momento, no se han presentado razones para abandonarlo. Pero, si esto es así, se establece también una vinculación inesperada con la posición de nuestro viejo amigo Ahmés, el escriba egipcio, porque para él la fuente de la matemática radica en una experiencia que se ha recogido y compilado, mientras que aquí resultaría que los sistemas formales de la matemática son utilizados, transitoria e hipotéticamente, por razones empíricas. De manera sorprendente, la matemática contemporánea, en cuanto a su fundamentación, parece más cercana al pensamiento empirista primitivo que a las concepciones formalistas y ontológicas que hicieron su aparición con Platón o, yendo más atrás, con Pitágoras.

En la actualidad, la matemática parece resultar de una combinación entre la posición formalista y la posición logicista. Existen sistemas axiomáticos para la teoría de conjuntos donde lo que se hace es proponer ciertos axiomas que hablarían acerca de conjuntos e impondrían a aquéllos determinadas propiedades. De hecho,

las propiedades que se imponen son lo suficientemente fuertes como para que se pueda derivar, mediante construcciones efectuadas a partir de los conjuntos, toda la matemática usualmente necesaria: aritmética, análisis, geometría, topologías, cálculo vectorial, etc. No obstante, hay que recordar que estos sistemas axiomáticos son sistemas formales: hablamos de los conjuntos pero no sabemos si existen. Son, una vez más, objetos imaginarios. Si hacemos una aplicación de la matemática a la física o a alguna otra ciencia fáctica, es oportuno preguntarse qué pasa con palabras tales como, en este caso, "conjunto". La respuesta, según algunos, es que la palabra se transforma simplemente en un símbolo de utilidad instrumental, en tanto que algún otro diría que, si se puede hacer una aplicación de la matemática conjuntística a la experiencia, es necesario admitir que, en algún sentido, *hay* conjuntos. No deseamos discutir este tema en profundidad, pero sí podemos decir que, desde el punto de vista epistemológico y en el ámbito de cuestiones metodológicas conexas, la teoría de conjuntos es, meramente, un discurso del cual no sabemos si permanece sólo en estado de discurso o bien si potencialmente es aplicable a alguna esfera ontológica de la realidad. En este último caso, de alguna manera Platón habría estado en lo correcto, en una forma inesperada, porque entonces existirían objetos matemáticos, como los conjuntos, y todos los objetos que se pueden construir a partir de conjuntos, es decir, todos los objetos matemáticos. Pero no sabemos si esto es cierto. Algunos lógicos han pensado siempre en una interpretación instrumentalista de los términos matemáticos en su uso físico, y ésta es una posición que se puede sostener. De hecho, lo que aquí importa es que la teoría de conjuntos, la base sobre la cual se construye actualmente toda la matemática, no es más que una hipótesis formal cuyo verdadero alcance no conocemos. Si algún día llegara a derrumbarse por culpa de la aparición de nuevas antinomias, tendríamos que buscar algún otro sistema, más adecuado o, tal vez, cambiar de estrategia y tratar de hallar un nuevo recurso lógico, más constructivo y novedoso que los que ofrecen los sistemas axiomáticos para la teoría de conjuntos actualmente conocida.

Bibliografía

Black, Max
The Nature of Mathematics. Routledge & Kegan Paul, Londres, 1953.

Heath, Thomas
History of Greek's Mathematics. Oxford U. P., Oxford, 1960.

Rey Pastor, Julio y Babini, José
Historia de la matemática. Gedisa, Barcelona, 1984.

Russell, Bertrand
Introducción a la filosofía matemática. Paidós, Barcelona, 1988.

Toranzos, Fausto
Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1949.

Otras obras de Gregorio Klimovsky
en el catálogo de A‣Z editora

Las desventuras del conocimiento científico
Serie La ciencia y la gente

La inexplicable sociedad (en coautoría con Cecilia Hidalgo)
Serie La ciencia y la gente

La matemática ha sido el primer ejemplo de ciencia con un grado tal de sistematización deductiva como para permitir a los investigadores tener a esta disciplina por un paradigma y ejemplo de cómo debe ser toda ciencia y de cómo ha de ser el método científico. Esta influencia ha resultado beneficiosa porque es la responsable de nuestra confianza en el rigor del método científico y en la posibilidad de utilizar tácticas lógicas para obtener conocimiento nuevo a partir del que ya se posee. No obstante, cuesta mucho imaginar que, en la actualidad, las ciencias sociales y humanas pudieran edificarse con una metodología similar a la de la matemática. Por eso resulta más que interesante volver a la historia de la ciencia y formular algunas preguntas básicas: ¿cuáles son los "objetos" de los que habla la matemática? ¿Cuál es la fuente del conocimiento de tales "objetos matemáticos" y de sus propiedades? ¿Qué estrategias emplean los matemáticos para lograr nuevos conocimientos? ¿Cómo se debe enseñar la matemática? ¿Cómo se vinculan los conocimientos matemáticos con las necesidades y objetivos de orden práctico? Las respuestas a estas preguntas permiten a Gregorio Klimovsky, uno de los mayores epistemólogos latinoamericanos, organizar una breve, apasionante y admirable exposición que, como todas las suyas, resulta indispensable tanto para quienes se interesan por las ciencias exactas como por las sociales.

45-003

a-Z editora

